Функция $|u|^{p'} \in G^M$ с $\theta = 1$, а из (12), (13) и условия 3) теоремы 3 непосредственно вытекает, что:

$$\Phi \in L_r(R^+) \text{ и } \left(\frac{c}{\lambda}\right)^r \int\limits_{\left\{x>0:\, x^{\frac{1}{r}}\Phi(x)>c^{-1}\lambda\right\}} \Phi^r(x)dx \le \left(\frac{\theta_1\theta_2 c}{\lambda}\right)^r \int\limits_{\left\{x>0:\, x^{\frac{1}{r}}|uv|(x)>(\theta_1\theta_2 c)^{-1}\lambda\right\}} |uv|^r\, dx.$$

Теперь мы можем утверждать, что (3) следует из (2).

Список литературы

1. *Ломакина Е.Д.* Оценки характеристических чисел интегральных операторов: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Хабаровск, 2006.
2. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов. — М., 1978.
3. *Кусаинова Л.К.*// Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Алма-Аты, 1999.
4. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — С. 416.

УДК 517.983.23

А.В.Ухман

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ДВУХВЕСОВОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ С УСЛОВИЕМ ОБОБЩЕННОЙ МОНОТОННОСТИ. II.

Мақалада $L_p(R^+)$ Лебег кеңістігінен $L_q(R^+)$ Лебег кеңістігіне, мұндағы $R^+ = (0,\infty)$, $1 < p \le q < \infty$, әсер ететін, екісалмақты Харди операторы қарастырылған. u және v функциялары реттіліктің анықталған локалдық шарттарын қанағаттандырған жағдайда орта шамамен екісалмақты Харди операторының аппроксимативтік сандарының функцияларын санайтын төменгі бағалалары алынған.

The Hardy integral operator $S: L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ defined by is considered. Under local regular conditions on u and v lower estimates for the counting function of the approximation numbers $a_n(S)$ are obtained, when $1 < p \le q < \infty$.

В работе рассматривается двухвесовой оператор Харди

$$Sf(x) = v(x)\int_0^x ufdy\,, \tag{1}$$

действующий из пространства Лебега $L_p(R^+)$ в $L_p(R^+)$, $R^+ = (0,\infty)$, $1 < p \le q < \infty$. Для случая, когда функции u и v удовлетворяют определенным локальным условиям регулярности в среднем получены нижние оценки считающей функции (функции распределения) аппроксимативных чисел оператора (1).

Пусть E, F — пара банаховых пространств, $L(E,F)$ — совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из E в F. Через $L_n(E,F)$ обозначим множество всех конечномерных операторов $A \in L(E,F)$, размерность образа которых $rankA \le n$. Величина

$$a_n(S) = \inf_{L \in L_n} \| T - A \|$$

называется n-ным аппроксимативным числом оператора $T \in L(E,F)$.

Изучение аппроксимативных чисел оператора (1) было начато в [1]. Дальнейшее развитие вопросы аппроксимативных характеристик операторов типа Вольтерра получили в работах [2–6]. Результаты данной работы дополняют статью [8], в которой была получена верхняя оценка функции распределения

$$N(\lambda;S)=\sum_{a_n(S)>\lambda}1$$

аппроксимативных чисел оператора S.

Пусть Q — промежуток в $R=(-\infty,\infty)$. Через $L(Q,loc)$ обозначается пространство локально суммируемых в Q функций. Неотрицательную функцию w из $L\left(Q,loc\right)$ будем называть весом в Q. Для измеримого $e\subset Q$ далее $|e|=\int_e dx$, $w(e)=\int_e wdx$, $\Delta=(a,b)$, $-\infty\le a<b\le\infty$; $\Delta^-=a$, $\Delta^+=b$. Положим $\Delta_h(x)=\left(x-h/2,x+h/2\right)$. Для $\alpha>0$ и $\Delta=\Delta_h(x)$ интервал $\alpha\Delta=\Delta_{\alpha h}(x)$. Далее $\Delta(x)=\left(\frac{x}{2},\frac{3x}{2}\right)$, $B=\bigcup_{x>0}\left\{\Delta:\Delta\subset\Delta(x)\right\}$.

Класс $A_p^+, 1<p<\infty$. Будем говорить, что вес ρ на R^+ удовлетворяет условию $\left(A_p^+\right)$, если

$$\sup_{x>0}\ \sup_{\Delta=\Delta_h(x)\in\Delta(x)}|\Delta|^{-1}\left(\int_\Delta\rho\right)^{1/p}\left(\int_\Delta\rho^{1-p'}\right)^{1/p'}=\|\rho\|_{A_p^+}<\infty,$$

где $p'=\dfrac{p}{p-1}$. Запись $\rho\in A_p^+$.

Класс $A_\infty^+\left(\delta,\gamma\right)$. Будем говорить, что вес ρ на R^+ удовлетворяет условию (A_∞^+), если для данного $\delta\in\left(0,1\right)$ найдется такое $\gamma\in\left(0,1\right)$, что для любого $\Delta\in B$

$$\int_e\rho\le\gamma\int_\Delta\rho\ \text{ как только } e\subset\Delta \text{ и } |e|\le\delta|\Delta|.$$

В дальнейшем важную роль будут играть следующие локальные характеристики функций $u(*)$ и $v(*)$ в среднем:

$$K(\Delta)=\left(\int_\Delta|u|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\int_\Delta|v|^q\right)^{1/q},\ \mu(\Delta)=\int_\Delta|uv|^r\,dt,\ \frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}.$$

Положим

$$K(x)=K(\Delta(x)),\ \mu(x)=\mu(\Delta(x)).$$

Теорема 1. Пусть $1<p\le q\le 2$ либо $2\le p\le q<\infty$, $|u|^{p'}\in A_p^+$, $|v|^q\in A_\infty^+$ и пусть

$$\lim_{x\to0}K(x)=\lim_{x\to\infty}K(x)=0. \tag{2}$$

Тогда имеет место оценка

$$N(\lambda;S)\ge\left(c\lambda\right)^{-r}\int_{\{x>0:\mu(x)>c\lambda\}}|uv|^r\,dx, \tag{3}$$

где $c=c(p,q)\left\||u|^{p'}\right\|_{A_p^+}$.

Теорема 2. Пусть $1<p=q<\infty$, $|u|^{p'}\in A_p^+$, $|v|^q\in A_\infty^+$ и пусть

$$\lim_{x\to0}K(x)=\lim_{x\to\infty}K(x)=0.$$

Тогда имеет место оценка

$$N(\lambda;S)\ge\left(c\lambda\right)^{-1}\int_{\{x>0:\mu(x)>c_u\lambda\}}|uv|\,dx, \tag{4}$$

где $c=c(p,q)\left\||u|^{p'}\right\|_{A_p^+}$.

Теорема 3. Пусть $1<p\le q\le 2$ либо $2\le p\le q<\infty$. Пусть u удовлетворяет условиям:

1) $U(t)=\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t |u|^{p'}\le \theta |u|^{p'}(t) \qquad \forall t>0;$

2) $U(2t)\le \theta_1 U(t), \quad \forall t>0;$

3) $\int\limits_\Delta |u|^{p'}\le \theta_2\int\limits_\Delta \dfrac{1}{t}U(t)dt \quad \forall \Delta=\Delta_h(x), \quad 0<h\le x.$

Пусть к тому же $|v|^q\in A_\infty^+$ и выполнено (2). Тогда справедлива оценка (3).

Теорема 4. Пусть $1<p=q<\infty$ и пусть веса u,v удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда имеет место оценка (4).

Замечания

1. Условиям 1)–3) теоремы 3 удовлетворяет функция $u(x)=x^\alpha$, $\alpha>0$.

2. $\psi(\lambda)=\lambda^{-r}\int\limits_{\{x>0:\mu(x)>\lambda\}}\mu$ строго монотонно убывает. Поэтому, обращая неравенство (3), получим оценки:

$$a_n(S)\ge c_u^{-1}\psi^{-1}(n+1), \quad n\ge 1.$$

3. Если оператор S компактен, то из (3) также следует предельное неравенство $\underline{\lim} n^{\frac{1}{r}}a_n(S)\le c_u^1\int\limits_0^\infty |uv|^r$.

В работе [6] были получены (при определенных условиях на u и v) следующие результаты:

$$\sup_{n\ge 1} n^{\frac{1}{r}}a_n(S)\le C(u,v),$$

$$\underline{\lim} n^{\frac{1}{r}}a_n(S)\ge c(p,q)\int\limits_0^\infty |uv|^r.$$

Лемма 1. ([8] п. 1.) Пусть $h(x)$ — положительная и ограниченная функция, определенная на ограниченном множестве $E\subset R^+$ и $0<h(x)\le x$ для любого $x>0$. Тогда существует не более чем счетное семейство интервалов $\{\Delta_j, j\in J\}$, $\Delta_j=\left(x_j-h(x_j)/2, x_j+h(x_j)/2\right)$ кратности 2 и разделяющееся на не более чем 4 подсемейств $\{\Delta_j, j\in J_i\}$ непересекающихся интервалов.

Такие покрытия мы будем называть B-покрытиями.

Перейдем к задаче дискретизации оценки снизу аппроксимативных чисел $a_n(S)$. Если $K(x)>\lambda$, то

$$0<h^*(x)=\inf\{h\in(0,x):K(\Delta_h(x))>\lambda\}\le x.$$

Понятно, что $K(\Delta^*(x))=\lambda$, где

$$\Delta^*(x)=\Delta_h(x) \text{ с } h=h^*(x).$$

Пусть $\{\Delta_j^*\}_{j=1}^n$ — конечная совокупность непересекающихся интервалов $\Delta_j^*=\Delta^*(x_j)$, где центры $x_j\in\Omega_\lambda=\{x>0:K(x)>\lambda\}$, $\widetilde{\Delta}_j^*=(1-\delta)\Delta_j^*$. Возьмем функцию $\varphi\in C_0^\infty$ с $\sup p(\varphi)\subset\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ такую, что $0\le\varphi\le 1$ на $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\varphi=1$ на $\left(-\dfrac{1-\delta}{2},\dfrac{1-\delta}{2}\right)$ и пусть $\sup|\varphi'|=c_0$. Положим $\varphi_j(x)=\varphi\left(|\Delta_j^*|^{-1}(x-x_j)\right)$. Ниже $L_{qv}(R^+)$ –весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{q,v}=\left(\int\limits_0^\infty |v(x)f|^q dx\right)^{1/q}.$$

Рассмотрим вначале оператор P на $L_{qv}(R^+)$. Положим

$$Pg=\sum_{j=1}^{n}\frac{(g,\varphi_j)^{\sim}}{(\varphi_j,\varphi_j)^{\sim}}\varphi_j ,$$

где $(g,\varphi_j)^{\sim}=\int\limits_{\Delta_j^*} g\varphi_j|v|^q\,dx$. Пусть $|v|^q\in A_\infty^+(\delta,\gamma)$. Применяя неравенство Гельдера к интегралу

$(g,\varphi_j)^{\sim}=\int\limits_{\Delta_j^*} g\varphi_j|v|^{1+\frac{q}{q'}}\,dx$, выводим оценки:

$$\int\limits_0^\infty |v(x)Pg|^q\,dx=\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{(g,\varphi_j)^{\sim}}{(\varphi_j,\varphi_j)^{\sim}}\right|^q\int\limits_{\Delta_j^*}|v\varphi_j|^q\,dx\le\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_{\tilde{\Delta}_j^*}|v|^q\,dx\right)^{-q}\left(\int\limits_{\Delta_j^*}|vg|^q\,dx\right)\left(\int\limits_{\Delta_j^*}|v|^q\right)^{q/q'}\int\limits_{\Delta_j^*}|v|^q\le$$

$$\le\frac{1}{1-\gamma}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Delta_j^*}|vg|^q\,dx\le\frac{1}{1-\gamma}\int\limits_0^\infty|gv|^q\,dx=c_1\,\|g\|_{L_{qv}}^q ,$$

откуда следует, что

$$\left\|P:L_{q,v}(R^+)\to L_{q,v}(R^+)\right\|\le c_1^{1/q},$$

где $c_1=(1-\gamma)^{-1}$.

Пусть W — ограниченное множество в нормированном пространстве X и пусть W содержит нулевой элемент X. Обозначим через F_k совокупность всех подпространств $M\subset X$ размерности $\le k$. Величина

$$d_k(W;X)=\inf_{M\in F_k}\sup_{x\in W}\inf_{y\in M}\|x-y\|_X$$

называется n-поперечником по Колмогорову множества W.

Пусть l_p^n — пространство R^n, наделенное нормой $\|\xi\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{1/p}$, $1<p<\infty$. Для единичного шара B_p^n в l_q^n известны следующие оценки (см. [9]):

$$d_k\left(B_p^n;l_q^n\right)=\begin{cases}1, & \text{если } 1\le p=q<\infty\\ \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}, & \text{если } 1\le p<q\le 2, 2\le p<q\le\infty\end{cases}\tag{5}$$

Лемма 2. Пусть $1\le p,q<\infty$, $\omega_1=|u|^{p'}\in A_p^+$, $\omega_2=|v|^q\in A_\infty^+$ и пусть существует $n\ge 2$ непересекающихся интервалов $\Delta_j^*=\Delta^*(x_j)$, на которых $K(\Delta_j^*)=\lambda$. Тогда для любого натурального $m\le 2^{-1}n$ справедлива оценка

$$a_m(S)\ge c_u^{-1}\lambda d_m\left(B_p^n;l_q^n\right),\tag{6}$$

где $c_u=c\|\omega_1\|_{A_p^+}$.

Доказательство леммы 2. Для произвольного взятого $\varepsilon>0$ найдется такой оператор $A:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$, что $\dim M(A)\le m$, где $M(A)=\left\{g=Af:f\in L_p(R^+)\right\}$, и

$$\varepsilon+a_m(S)\ge\left\|S-A;L_p(R^+)\to L_q(R^+)\right\|.\tag{7}$$

Далее,

$$\left\|S-A;L_p(R^+)\to L_q(R^+)\right\|=\sup_{f:\|f\|\le1}\|Sf-Af\|_q\ge\sup_{f:\|f\|\le1}\inf_{g\in M(A)}\|Sf-g\|_q\ge$$

$$\ge\inf_{M\in F_m(L_q(R^+))}\sup_{f:\|f\|\le1}\inf_{g\in M(A)}\left(\int\limits_0^\infty\left|v(x)\int\limits_0^x fu-g(x)\right|^q dx\right)^{1/q}.\tag{8}$$

Обозначим через W множество всех $F(x)$, абсолютно непрерывных в R^+ и удовлетворяющих условиям $F(0)=0$, $\left\|\frac{1}{u}F^{'}\right\|\le 1$. Тогда для любого $M\in F_m(L_q(R^+))$

$$\sup_{f:\|f\|_p\le 1}\ \inf_{g\in M(A)}\left(\int_0^\infty\left|v(x)\int_0^x fu-g(x)\right|^q\right)^{1/q}dx\ \ge\ \sup_{F\in U}\ \inf_{g\in M(A)}\|F-g\|_{L_{q,v}}\ \ge$$

$$\ge\frac{1}{\|P\|}\sup_{F\in U}\ \inf_{g\in M(A)}\|PF-Pg\|_{L_{q,v}}\ \ge\ \sup_{0\ne\xi=(\xi_i)}\ \inf_{g\in M}\frac{\left\|P\left(\sum\limits_{j=1}^n\xi_j\varphi_j\right)-Pg\right\|}{\left\|\frac{1}{u}\sum\limits_{j=1}^n\xi_j\varphi_j\right\|_p}. \tag{9}$$

Пусть $\{g_k\}_{k=1}^s(s\le m)$ — базис подпространства M и $g=\sum\limits_{k=1}^s\eta_k g_k\in M, f=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j\varphi_j$.

Тогда

$$Pf=\sum_{j=1}^n\xi_j\varphi_j,\quad Pg=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^s a_{jk}\eta_k\varphi_j,$$

где $a_{jk}=\dfrac{(g_k\varphi_j)^{\sim}}{(\varphi_j,\varphi_j)^{\sim}}$, и

$$\|Pf-Pg\|_{L_{q,i}}^q=\sum_{j=1}^n\left|\xi_j-\sum_{k=1}^s a_{jk}\eta_k\right|^q\int_{\Delta_j^*}|v\varphi_j|^q dx.$$

Пусть $\widetilde{L}$ — подпространство R^n, натянутое на систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^s$, где $a^k=(a_{k1},...,a_{kn})$. Оценка (9), в свою очередь, приводит к следующей оценке:

$$\sup_{f:\|f\|_p\le 1}\ \inf_{g\in M(A)}\left(\int_0^\infty\left|v(x)\int_0^x fu-g(x)\right|^q dx\right)^{1/q}\ge(1-\gamma)\sup_{0\ne\xi=(\xi_j)\in R^n}\ \inf_{y\in\widetilde{L}}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^n|\xi_j-y_j|^q\int\limits_{\Delta_j^*}|v|^q dy\right)^{1/q}}{\left(\sum\limits_{j=1}^n|\xi_j|^p\int\limits_{\widetilde{\Delta}_j}\left|\frac{1}{u}\varphi_j^{'}\right|^p dx\right)^{1/p}}\ge$$

$$\ge(1-\gamma)\inf_{L\subset F_s(R^n)}\ \sup_{0\ne\xi=(\xi_j)\in R^n}\ \inf_{y\in L}\left[\sum_{j=1}^n|\xi_j-y_j|^q\int_{\Delta_j^*}|\upsilon|^q dx\left(\int_{\Delta_j^*}|u^{-1}\varphi_j^{'}|^p\right)^{-q/p}dx\right]^{1/q}\left(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^p\right)^{-1/p}.$$

Из условий $\omega_1=|u|^{p^{'}}\in A_p^+,\omega_2=|v|^q\in A_\infty^+$ следует, что

$$\left(\int_{\Delta_j^*}|v|^q dx\right)\left(\int_{\Delta_j^*}|u^{-1}\varphi_j^{'}|^p dx\right)^{-q/p}\ge K\left(\Delta_j^*\right)^q c_u^{-1}=c_u^{-1}\lambda^q, \tag{10}$$

где $c_u=c(p,q)\|\omega_1\|_{A_p^+}$, и из (5), (7)–(10) следует, что

$$a_m(S)\ge c_u^{-1}\lambda d_m\left(B_p^n;l_q^n\right). \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть множество $\Omega_\lambda=\{x>0:K(x)>\lambda\}\ne\varnothing$. Обозначим через $\{\Delta_j^*\}-B$ — покрытие $G_\lambda=\{x>0:\mu(x)>\lambda\}$, разделяющееся на подсемейства $\{\Delta_j^*, j\in J_i^*\}$, $i\le 4$, непересекающихся интервалов Δ_j^*. Допустим, что хотя бы одно из подсемейств $\{\Delta_j^*, j\in J_{i_0}^*\}$ содержит конечное подмножество $\{\Delta^*_j,\, j\in\Lambda\}$ с $n=card(\Lambda)\geq 2$. Пусть m — максимальное натуральное число, не превосходящее $2^{-1}n$. Тогда из леммы 1 и (5) получаем, что $a_m(S)\geq c_1^{-1}\lambda$, где $c_1=\sqrt{2}c_u$, откуда

$$N(c_1^{-1}\lambda;S)\geq \sup_{\Lambda\subset J^*_{i_0}} card(\Lambda).$$

Заметим, что в силу неравенства Гельдера относительно сопряженных показателей $\frac{p'}{r}$ и $\frac{q}{r}$ для любого $\Delta\in B$

$$\int_\Delta |uv|^r \leq \left(\int_\Delta |u|^{p'}\right)^{r/p'}\left(\int_\Delta |v|^q\right)^{r/q}=K(\Delta)^r. \tag{12}$$

В частности, из (12) следует, что $G_\lambda\subset\Omega_\lambda$. Используя (12), продолжим оценки:

$$\sup_{\Lambda\subset J^*_{i_0}} card(\Lambda)=\lambda^{-r}\sup_{\Lambda\subset J^*_{i_0}}\sum_{j\in\Lambda}\left(K\left(\Delta^*_j\right)\right)^r\geq\lambda^{-r}\sup_{\Lambda\subset J^*_{i_0}}\sum_{j\in J^*_{i_0}}\int_{\Delta^*_j}|uv|^r dx.$$

Если $card(J^*_i)=1$, то

$$1=\lambda^{-r}\sum_{j\in J^*_i}K\left(\Delta^*_j\right)^r.$$

В итоге

$$N(c_1^{-1}\lambda;S)\geq 4^{-1}\lambda^{-r}\sum_i\sum_{j\in J^*_i}\int_{\Delta^*_j}|uv|^r\geq 4^{-1}\lambda^{-r}\int_{G_\lambda}|uv|^r dx. \tag{13}$$

Если $\Omega_\lambda=\{x>0:K(x)>\lambda\}$ пусто, то и G_λ пусто, соответственно

$$\int_{G_\lambda}|uv|^r dx=0.$$

Замена $\lambda'=c_1^{-1}\lambda$ в (13) приводит к окончательной оценке.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 1, если мы покажем, что из условий 1)–3) теоремы 3 следует, что $\varpi_1=|u|^{p'}\in A_p^+$. Пусть $0<h\leq\frac{x}{2}$. Тогда

$$\frac{3}{4}x<t<\frac{5}{4}x\quad\forall t\in\Delta_h(x),$$

и из условий 1) и 3) на функцию $\varpi_1=|u|^{p'}\in A_p^+$ следует

$$\int_\Delta\left(\frac{dt}{|u|^p}\right)^{1/p}\leq\theta^{1/p'}\left(\int_\Delta\left(\frac{1}{t}U(t)\right)^{-p/p'}dt\right)^{1/p}\leq|\Delta|^{1/p}\left(\frac{5\theta}{4}\right)^{1/p'}\left(\frac{1}{x}U\left(\frac{3x}{4}\right)\right)^{-1/p'}=\left(\frac{5\theta}{4}\right)^{1/p'}|\Delta|\left(\int_\Delta\left(\frac{1}{x}U\left(\frac{3x}{4}\right)\right)dt\right)^{-1/p'}\leq$$

$$\leq\left(\frac{5\theta\theta_1}{3}\right)^{1/p'}|\Delta|\left(\int_\Delta\frac{1}{t}U(t)\,dt\right)^{-1/p'}\leq\left(\frac{5\theta\theta_1\theta_2}{3}\right)^{1/p'}|\Delta|\left(\int_\Delta\varpi_1\right)^{-1/p'},$$

откуда следует

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\int_\Delta\varpi_1^{1-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_\Delta\varpi_1\right)^{1/p}\leq c_1=\left(\frac{5\theta\theta_1\theta_2}{3}\right)^{1/p'}. \tag{14}$$

Пусть $\frac{x}{2}<h\leq x$. Тогда

$$\int_\Delta|u|^{-p}\leq\theta^{p/p'}\left(\int_\Delta t^{p/p'}dt\right)\left(\int_0^{x/2}\omega_1\right)^{-p/p'}\leq 4^p\theta^{p/p'}\frac{1}{p}\left(\frac{3}{2}\right)^p|\Delta|^p\left(\theta_1^{-2}\int_0^{2x}\omega_1\right)^{-p/p'}\leq c_2^p|\Delta|^p\left(\int_\Delta\omega_1\right)^{-p/p'},$$

откуда имеем

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\int_{\Delta}\omega_1\right)^{1/p'}\left(\int_{\Delta}|u|^{-p}\right)^{1/p} \le c_2 = 4\theta^{1/p'}. \tag{15}$$

В силу (14) и (15) $c_u \le 4\left(\theta\theta_1\theta_2\right)^{1/p'}$.

Доказательство теоремы 4 повторяет приведенные выше рассуждения.

Список литературы

1. *Edmunds D.E., Evans W.D.* Spectral theory and differential operators. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.
2. *Edmunds D.E., Evans W.D., Harris D.J.* Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // StudiaMath. — 1997. — Vol. 124. — P. 59–80.
3. *Ломакина Е.Н., Степанов В.Д.* Об асимптотическом поведении аппроксимативных чисел и оценках норм Шатенна-Неймана интегрального оператора типа Харди // Докл. РАН. — 1999. — Т. 367. — № 5. — С. 594–596.
4. *Lomakina E.D.* On asymptotic of the approximation numbers and estimates of Schatten vonNeumann norms of the Hardy-type integral operators // Function spaces and application.— New Delhi: Narosa Publishing House, 2000. — P. 153–187.
5. *Ломакина Е.Н., Степанов В.Д.* Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана-Лиувилля // Доклады РАН. — 2005. — Т. 403. — № 5. — С. 598–599.
6. *Ломакина Е.Д.* Оценки характеристических чисел интегральных операторов: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Хабаровск, 2006.
7. *Кусаинова Л.К., Ухман Л.К.* Об асимптотике функции распределения аппроксимативных чисел двухвесового оператора Харди // Вестн. ПГУ. — Павлодар: Изд-во ПГУ, 2010. — № 3. — С. 132–141.
8. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов. — М., 1978.
9. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М., 1976.