

О разрешимости одной нелокальной задачи с граничным оператором высокого порядка

On the solvability of a nonlocal problem with boundary operator of a high order

Турметов Б.Х., Муратбекова М.А.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: moldir_1983@mail.ru)

Мақалада гармониялық функциялар класында кейбір интегро-дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Бұл операторлардың қолданысы ретінде бірлік шардағы Лаплас теңдеуі үшін локальді емес шеттік есептің шешімділігінің мәселелері анықталды. Қарастырылып отырған есеп Лаплас теңдеуі үшін Бицадзе-Самарский есебінің қарапайым жалпыламасы болып табылады. Есептің шешімінің жалғыздығы және бар болуы туралы теоремалар дәлелденді. Есептің шешімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар алынған.

In this paper we study the properties of some integral-differential operators in the class of harmonic functions. As an application of these operators for the Laplace equation in the unit ball we investigate the solvability of nonlocal boundary value problem. The problem in question is the simplest generalization of the Bitsadze-Samarskii problem for the Laplace equation. The theorem about the uniqueness and existence of solutions of the problem is proved. A necessary and sufficient condition for the solvability of the problem is received.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ — единичный шар в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$; $\partial\Omega$ — его граница и $u(x)$ — гармоническая функция в Ω , $r = |x|$, $\theta = x/|x|$.

Рассмотрим операторы

$$\Gamma_c^m[u](x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right)^m u(x) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right) \dots \left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right) u(x),$$

$$\Gamma_c^{-m}[u](x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} u(sx) ds,$$

где $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, а $0 < c$ — действительное число. В дальнейшем будем считать, что $\Gamma_c^0[u](x) = u(x)$. Оператор Γ_c^m был введен И.И.Бавриным [1].

Пусть последовательности чисел $\{\delta_i, a_i, i \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяют условиям

$$0 < \delta_i \leq b < 1, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty.$$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\Gamma_c^m[u](x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Gamma_c^\ell[u](\delta_i x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $0 \leq \ell \leq m$.

Решением задачи (1)–(2) назовем функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, гармоническую в шаре Ω , для которой функция $\Gamma_c^m[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере условию (2).

Рассматриваемая задача является простейшим обобщением задачи Бицадзе-Самарского [2] на граничные операторы высокого порядка.

Отметим также, что аналогичные задачи в случаях $m = 0, 1$ изучались в работах [3–4], а с операторами дробного порядка — в работах [5–6].

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Лемма 1. Если $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, то функции $\Gamma_c^m[u](x)$, $\Gamma_c^{-m}[u](x)$ также являются гармоническими в Ω .

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Применим к ней оператор Γ_c^m . Так как $\left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right)u(x) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + c\right)u(x)$, то

$$\Delta[\Gamma_c[u](x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 2 + c\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [u](x) = \Gamma_{c+2}[\Delta u(x)].$$

Далее, используя метод математической индукции по m , окончательно получаем:

$$\Delta[\Gamma_c^m[u]](x) = \Delta\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + c\right)^m u(x) = \Gamma_{c+2}^m[\Delta u](x) = 0.$$

Гармоничность функции $\Gamma_c^{-m}[u](x)$ доказывается непосредственно подсчетом, т.е.

$$\Delta[\Gamma_c^{-m}[u]](x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c+1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Delta u(sx) ds = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds. \quad (3)$$

Доказательство. Представим гармоническую функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} u_k^{(j)} H_k^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{1}{(k+c)^m} (k+c)^m u_k^{(j)} H_k^{(j)}(x), \quad (4)$$

где $\{H_k^{(j)}(x), j=1, \dots, h_k\}$, — полная система однородных гармонических полиномов степени k , а $u_k^{(j)}$ — коэффициенты разложения (4). Далее, учитывая равенства

$$H_k^{(j)}(x) = r^k H_k^{(j)}(\theta), \quad \frac{1}{(k+c)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{k+c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} ds$$

и равномерную сходимость ряда (4) по x при $|x| \leq \rho < 1$, функцию $u(x)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{r^k}{(k+c)^m} (k+c)^m u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta) = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} (k+c)^m (sr)^k u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta) \right\} ds = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} + c\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} (sr)^k u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta) \right\} ds = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Gamma_c^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} u_k^{(j)} H_k^{(j)}(sx) \right\} ds = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, то справедливы равенства

$$\Gamma_c^{-m}[\Gamma_c^m[u](x)] = u(x), \quad \Gamma_c^m[\Gamma_c^{-m}[u](x)] = u(x). \quad (5)$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Применим к функции $\Gamma_c^m[u](x)$ оператор Γ_c^{-m} . По определению оператора Γ_c^{-m} в соответствии с леммой 2 имеем:

$$\Gamma_c^{-m}[\Gamma_c^m[u](x)] = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds = u(x).$$

Для доказательства второго равенства применим оператор Γ_c^m к функции $\Gamma_c^{-m}[u](x)$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_c^m[\Gamma_c^{-m}[u](x)] &= \frac{\Gamma_c^m}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} u(sx) ds = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds = u(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4 [7]. Пусть в задаче (1)–(2) выполняется условие $a_i = 0, i = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ решение задачи существует единственно и представляется в виде

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1} v(sx) ds, \quad (6)$$

где $v(x)$ — решение задачи Дирихле.

Лемма 5. Если функция $u(x)$ — гармоническая в области Ω , то для любого $x \in \Omega$ и $\ell < m$, $m = 1, 2, \dots$, $\ell = 0, 1, \dots, m-1$, справедливо равенство

$$\Gamma_c^\ell[u](x) = \frac{1}{(m-\ell-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-\ell-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds. \quad (7)$$

Доказательство. Представим функцию $u(x)$ в виде ряда (4) и применим к нему оператор Γ_c^ℓ , тогда

$$\Gamma_c^\ell[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} r^k (k+c)^\ell u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta).$$

Преобразуем функцию $\Gamma_c^\ell[u](x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\ell[u](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{r^k}{(k+c)^m} (k+c)^\ell (k+c)^m u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{r^k}{(k+c)^{m-\ell}} (k+c)^m u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta). \end{aligned}$$

Так как $\ell < m$, то $m-\ell > 0$, и пусть $p = m-\ell$. Тогда, используя те же рассуждения, как в лемме 2, получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\ell[u](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{r^k}{(k+c)^p} (k+c)^m u_k^{(j)} H_k^{(j)}(\theta) = \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds = \frac{1}{(m-\ell-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-\ell-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Основные утверждения. В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $0 < \delta_i \leq b < 1$, $0 \leq \ell \leq m$, $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq c^{m-\ell}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (8)$$

Тогда:

1) если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \neq c^{m-\ell}, \quad (9)$$

то задача (1), (2) однозначно разрешима;

2) если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = c^{m-\ell}, \quad (10)$$

то для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\partial\Omega} f(x) ds_x = 0. \quad (11)$$

Причем, если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство теоремы. Исследуем единственность решения задачи (1), (2). Пусть функция $u(x)$ является решением задачи (1), (2) при $f(x) = 0$. Так как $u(x)$ — гармоническая функция, то из утверждения леммы 1 следует, что функция $\Gamma_c^m[u](x)$ также является гармонической. Обозначим

$$M = \max_{x \in \partial\Omega} |\Gamma_c^m[u](x)| = |\Gamma_c^m[u](x_0)|, \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

Если $\Gamma_c^m[u](x) \neq const$, то в силу принципа максимума $|\Gamma_c^m[u](x)| < M$ для любого $x \in \Omega$. В силу условия (2) и определения оператора Γ_c^{-m} при $f(x) = 0$ получаем:

$$M = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Gamma_c^l[u](\delta_i x_0) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i \Gamma_c^l[u](\delta_i x_0)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |\Gamma_c^l[u](\delta_i x_0)|.$$

Следовательно, используя равенство (7), имеем:

$$M \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i(x_0)| \cdot \left| \frac{1}{(m-l-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{m-l-1} \Gamma_c^m[u](s x_0) ds \right|.$$

Так как $0 < \delta_i \leq b < 1$, то $\delta_i x_0 \in \Omega$ и при любом $s \in [0, 1]$ $s \delta_i x_0 \in \Omega$. Тогда

$$|\Gamma_c^m[u](s \delta_i x_0)| < M.$$

Отсюда в силу условия (8) получаем противоречие

$$M < \frac{M}{c^{\ell-m}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \right] < M.$$

Таким образом, если выполняется условие (8), то необходимо, чтобы $\Gamma_c^m[u](x) = M = const$. Подставляя функцию $u(x) = \frac{M}{c^m}$ в условие (2), с учетом равенств $\Gamma^m \left[\frac{M}{c^m} \right] = M$, $\Gamma^l \left[\frac{M}{c^m} \right] = \frac{M}{c^{m-l}}$, получим

$$M - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{M}{c^{m-l}} = 0. \text{ Последнее равенство эквивалентно равенству } M \left[1 - \frac{1}{c^{m-l}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right] = 0. \text{ Тогда } M = 0$$

$$\text{или } \left[1 - \frac{1}{c^{m-l}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right] = 0. \text{ Таким образом, при выполнении условий (8) и (9) получаем } u(x) \equiv 0.$$

Если выполняется условие (10), то любая постоянная является решением однородной задачи.

Действительно, если $u(x) \equiv M$, то $\Gamma_c^m[M] = c^m M$, $\Gamma_c^l[M] = c^l M$. Тогда, подставляя $u(x) \equiv M$ в граничное условие (2), получим $c^m M - c^l M \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 0$.

Существование решения. Если $v(x)$ — решение задачи Дирихле

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

то оно представляется в виде интеграла Пуассона:

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y) \mu(y) dS_y, \quad P(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

При такой функции $v(x)$, в силу утверждения леммы 4, функция (6) удовлетворяет условиям

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \Gamma_c^m[u](x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Используя представление функции $v(x)$ в виде интеграла Пуассона и меняя местами порядки интегрирования, получаем:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P_m(x, y) \mu(y) dS_y, \quad (12)$$

где $P_m(x, y)$ представляется в виде

$$P_m(x, y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{m-1} P(sx, y) ds. \quad (13)$$

Считая $\mu(x)$ неизвестной функцией, решение задачи будем искать в виде (12). Подставляя (12) в граничное условие (2), с учетом равенства $\Gamma_c^m[u](x) = \mu(x), x \in \partial\Omega$ и следующего соотношения:

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\ell[u](x) &= \frac{1}{(m-\ell-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-\ell-1} \Gamma_c^m[u](sx) ds = \\ &= \frac{1}{(m-\ell-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-\ell-1} \int_{\partial\Omega} P(sx, y) \mu(y) dS_y ds = \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{(m-\ell-1)!} \int_0^1 s^{c-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-\ell-1} P(sx, y) ds \mu(y) dS_y = \int_{\partial\Omega} P_{m-\ell}(sx, y) \mu(y) dS_y, \end{aligned}$$

получаем:

$$\mu(x) - \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{m-\ell}(\delta_i x, y) \right] \mu(y) dS_y = f(x). \quad (14)$$

Обозначим

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P_m(\delta_i x, y). \quad (15)$$

Тогда уравнение (14) можно представить в виде

$$\mu(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \mu(y) dS_y = f(x). \quad (16)$$

Для исследования разрешимости интегрального уравнения (16) необходимо изучить ядро этого уравнения. Покажем, что функция $K(x, y)$ является непрерывной на $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать непрерывность функции $P_{m-\ell}(\delta_j x, y)$. Так как $0 < \delta_j \leq b < 1$, то $\delta_j x \in \Omega_1 \subset \Omega$ и поэтому для любых $x, y \in \partial\Omega$ $|s\delta_j x - y| > 0$, т.е. функция $P_{m-\ell}(\delta_j x, y)$ непрерывна на $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Кроме того, из равенства

$$s^2 \delta_j^2 |x|^2 - 2s\delta_j(x, y) + |y|^2 = s^2 \delta_j^2 |y|^2 - 2s\delta_j(y, x) + |x|^2, |x| = |y| = 1$$

получаем $|s\delta_j x - y|^2 = |s\delta_j y - x|^2$, т.е. ядро $K(x, y)$ является симметричным.

Таким образом, ядро интегрального уравнения (16) является симметричным, и к нему применима теория Фредгольма. Так как при $f(x) = 0$ и при выполнении условия (9) решением задачи (1), (2) может быть только $u(x) \equiv 0$, то при $f(x) = 0$ интегральное уравнение (16) имеет только нулевое решение. Следовательно, для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ решение уравнения (16) существует, единственно и принадлежит классу $C(\partial\Omega)$.

Если выполняется условие (10), то $u(x) = C$ удовлетворяет условию (2) в случае $f(x) \equiv 0$, т.е. соответствующее интегральному уравнению (16) однородное уравнение имеет ненулевое решение. Тогда союзное однородное уравнение также имеет ненулевое решение, и поэтому в этом случае для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение условия (11).

Теорема доказана.

Замечание. Если в задаче (1), (2) $\ell = 0$, то условие (8) переходит в условие вида $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq c^m$, а если $\ell = m$, то имеет вид $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq 1$. В этом случае условия (9) и (10) совпадают с условиями нелокальной задачи с граничным оператором $\Gamma_c^0[u](x) = u(x)$, исследованной в работе [5].

References

1. *Bavrin I.I.* Operators for the harmonic functions and their applications // *Differential Equations*. — 1985. — Vol. 21. — № 1. — P. 9–15.
2. *Bitsadze A.V., Samarskii A.A.* On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems // *Soviet Math. Rep.* — 1969. — № 10 (2) — P. 398–400.

3. Pulatov A.K. On a problem Bitsadze-Samarskii // Differential Equations. — 1989. — Vol. 25. — № 3. — P. 537–540.
4. Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary-value problems // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 166. — № 4. — P. 377–561.
5. Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On the solvability of some problems for the Laplace equation // Mathematical journal. — Almaty, 2010. — Vol. 10. — № 1 (35). — P. 93–103.
6. Turmetov B.H., Ilyasova M.T. On the solvability of a nonlocal problem with a boundary operator of fractional order Hadamard Marsh. // Bulletin of ENU. — Astana. — 2010. — № 2 (75). — P. 24–30.
7. Karachik V.V. and Turmetov B.Kh. One problem for the harmonic equation // Ser. Phis.-math. Sciences. — Tashkent. 1990. — № 4. — P. 17–21.

ӘОЖ 531

Цилиндрлік қабықшаны есептеу

Calculation of a cylindrical environment

Тұрсынов К.А., Тойчибекова М.К., Самалықова С.Б.

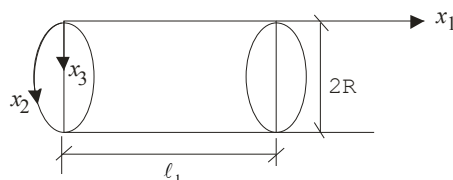
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: mkt88_01@mail.ru)

Статья посвящена расчету цилиндрической оболочки. На базе известного основного уравнения пластины получено основное уравнение оболочки, которое существенно отличается от уравнения существующих теорий, тем самым значительно упрощая расчеты цилиндрических оболочек. При осесимметричных деформациях расчеты цилиндрических оболочек сведены к расчету изгибаемой балки. Осуществлен учет параметров нормального перемещения и жесткости в расчетных формулах теории оболочек. Получено решение задачи изгиба цилиндрической оболочки при действии произвольных внешних нагрузок, жесткостных характеристик.

Article is devoted to calculation of a cylindrical environment. On the basis of the known basic equation of a plate the basic equation of an environment which essentially differs from the equation of existing theories and by that essentially simplifies calculations of cylindrical environments is received. At symmetric on an axis deformations calculations of cylindrical environments are shown to calculation of a bent beam. The account of parameters of normal moving and rigidity in settlement formulas of the theory of covers is carried out. The decision of a problem of a bend of a cylindrical cover is received, at action of any external loadings, rigid characteristics.

Цилиндрлік қабықша ұшатын аппараттар мен қозғалтқыштардың, су асты кемелерінің, резервуарлардың және де құбырлардың, сонымен қатар тағы басқа конструкцияларына кіреді. Сондықтан да оларды есептеу практикалық жағынан үлкен қызығушылық тудырады [1–4].

Ең алдымен қалыңдығы h тұрақты дөңгелек цилиндрлік қабықшаны есептеудің сызықтық теорияның негізгі қатыстарын келтіріп өтейік. Орта бетінің қисығының радиусын R арқылы белгілейік. Орталық беттің кез келген нүктесінің координатасын анықтайтын параметр ретінде доға мен құраушы бойымен бағытталған x_1 және x_2 координаталарын таңдап алайық (сур. қара).



Сур. Цилиндрлік қабықша

Осы бағыттардағы және нормаль бойындағы жылжуларды u_1, u_2 және W арқылы белгілейміз. Жалпыланған пластинаға сыртқы күштерден басқа қабақшының бұралуымен қисықтары арқылы өрнектелген күштер әсер етеді. Төменнен жоғары қарай бағытталған көлденең күшті мына түрде аламыз: