УДК 531.88

Т.Х.Макажанова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Orumbayevan@mail.ru)

О выпуклости и звездности подмножеств в конечномерных пространствах

В статье исследованы свойства построенного А.М.Рубиновым и А.А.Ягубовым пространства звездных подмножеств конечномерного евклидова пространства. Определение звездного множества имеет топологический характер. Полученные результаты свидетельствуют о том, что содержательным является совместное рассмотрение свойств выпуклости и звездности множеств и отображений со звездными образами.

Ключевые слова: звёздное подмножество, калибровочная функция, выпуклая оболочка, компактность.

Основные определения заимствованы из [1]: $X = R^n - n$-мерное евклидово пространство; $|x|$ — евклидова норма в X; $B = B(0,r) = \{x \in X : |x| \le r\}$, $(r > 0)$— замкнутый шар радиуса r с центром в 0; $B_0 = B(0,1)$ — единичный шар; $M \subset X \Rightarrow clM$ — замыкание M, $\operatorname{int} M$ — внутренность M; frM — граница M.

Известно, что в R^n ограниченность множества M означает, что найдется шар $B = B(0,r) : M \subset B$; компактность множества M равносильна его замкнутости и ограниченности. Тем самым для замкнутых множеств в R^n компактность и ограниченность эквивалентны.

Звездным называется замкнутое подмножество $\Omega \subset X$, содержащее точку 0 внутренней точкой и такое, что граница Ω пересекает каждый исходящий из 0 луч $Lx = \{\alpha x, \alpha \ge 0\}$ $(x \ne 0)$ не более чем в одной точке.

Назовем последнее свойство граничным свойством звездного множества.

Не уменьшая общности, можно считать, что звездное множество содержит 0 вместе с некоторой шаровой окрестностью $B = B(0,r)$. При этом любой шар $B = B(0,r)$ — звездное выпуклое компактное множество в $X = R^n$.

Пусть $\Omega \subset X$, $O \in \operatorname{int}\Omega$, определим вещественную функцию

$$P\omega(x) = \inf\{\lambda > O : x \in \lambda\Omega\} \ \forall x \in X,$$

называемую калибром множества Ω.

В [1] показано, что вещественная функция P является калибром звездного множества $\Omega{:}P = P\omega \Leftrightarrow \rho$, неотрицательна, непрерывна, положительно однородна, т.е.

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \, \forall \alpha \ge 0), \text{ при этом } \Omega = \{x \in X : p(x) \le 1\}.$$

Совокупность всех звездных подмножеств в X обозначим $S(X)$, а совокупность их калибров — $K(X)$.

Предложение 1. Отображение $\psi{:}S(X) \to K(X)$, осуществляемое по формуле $\psi(\Omega) = P\omega$, является биекцией.

В пространстве $S(X)$ вводятся алгебраические операции инверсного сложения $\oplus$ и инверсного умножения на неотрицательные числа $\otimes$ по формулам

$$\Omega_1 \oplus \Omega_2 = cl \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} \left(\alpha\Omega_1 \cap (1-\alpha)\Omega_2\right); \ \alpha \otimes \Omega = \frac{1}{\alpha}\Omega, \ \alpha > 0, \ 0 \cdot \Omega = R^n.$$

В пространстве $K(X)$ естественным образом вводятся операции сложения и умножения калибров на неотрицательные числа:

$$\left(P_1 + P_2\right)(x) = P_1(x) + P_2(x) \ \forall x \in X; \ (\alpha\rho)(x) = \alpha p(x) \ \forall \alpha \ge 0 \ \forall x \in X.$$

Предложение 2. Отображение ψ (предложение 1) является алгебраическим изоморфизмом пространств $S(X)$ и $K(X)$.

Введенные операции превращают $S(X)$ и $K(X)$ в конусы.

Отметим, что роль 0 в $S(X)$ играет все пространство R^n, калибром единичного шара B_0 является евклидова норма $|\ |$ в X.

В совокупности $S(X)$ вводится отношение порядка по антивключению, т.е.

$$\Omega_1 \geq \Omega_2 \Leftrightarrow \Omega_1 \subset \Omega_2.$$

Множество калибров $K(X)$ упорядочивается естественным образом:

$$P_1 \geq P_2 \Leftrightarrow P_1(x) \geq P_2(x) \ \ \forall x \in X.$$

Справедливо

Предложение 3. Отображение ψ является порядковым изоморфизмом пространств $S(X)$ и $K(X)$.

Доказательства предложений 1–3 в [1].

Далее везде в качестве $S(X)$ и $K(X)$ мы будем рассматривать упорядоченные конусы звездных множеств и их калибров с определенными выше алгебраическими операциями и порядком.

Отметим следующие результаты, описывающие свойства звездных множеств.

Напомним, что выпуклой оболочкой coM множества M называется наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее M:

$$coM = \left\{ x = \sum_1^k \alpha_i x_i,\ \alpha_i \geq 0, x_i \in M\ \forall i = \overline{1,k},\ \sum_1^k \alpha_i = 1,\ k = \overline{1,\infty} \right\},$$

т.е. состоит из всевозможных конечных выпуклых комбинаций элементов из M.

Предложение 4. Пусть

$$x_0 \in X,\ B = B(0,r) \Rightarrow co\{x_0 \cup B\} = \{x = \alpha x_0 + \beta y, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, y \in B\}.$$

По определению

$$co\{x_0 \cup B\} = \left\{ x = \alpha x_0 + \sum_1^k \beta_i y_i,\ \alpha, \beta_i \geq 0,\ y_i \in B\ \forall i,\ \alpha + \sum \beta_i = 1, k = \overline{1,\infty} \right\}.$$

Таким образом, для доказательства предложения нам нужно проверить включение

$$co\{x_0 \cup B\} \subset \{x = \alpha x_0 + \beta y, \text{ где } \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1, y \in B\}.$$

Пусть $x = \alpha x_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i y_i,\ \alpha, \beta_i \in co\{x_0 \cup B\},\ y = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i$, тогда $y = \alpha \cdot 0 + \sum_{i=1}^k \beta_i y_i$, т.е. y — выпуклая комбинация элементов $O, y_1, y_2, ..., y_k$ из B и $y \in B$ в силу выпуклости B, при этом $x = \alpha x_0 + y$.

Пусть $\beta = 1 - \alpha,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ y' = \beta y = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) y \in B$ в силу выпуклости B, но тогда $x = \alpha x_0 + \beta y'$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. $co\{x_0 \cup B\}$ можно представить и в виде

$$co\{x_0 \cup B\} = \{\alpha x_0 + (1-y)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ y \in B\} = \{\alpha x_0 + (1-\alpha)B,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Предложение 5. Пусть $Lx_0 = \{\alpha x_0, \alpha \geq 0\}$ — луч, исходящий из 0, проходящий через точку $x_0 \neq 0,\ x_1 = \alpha_1 x_0,\ x_2 = \alpha_2 x_0 \in Lx_0$ и $0 < \alpha_1 < \alpha_2,\ B = B(0,r) \Rightarrow \exists$ — шар

$$B_1 = B(0,r_1): x_1 + B_1 \subset co\{x_0 \cup B\}.$$

Доказательство. Из условий $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ имеем $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ и $\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} r > 0$, поэтому $\exists\ r_1 : 0 < r_1 < \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} r.$

Пусть $B_1 = B(0,r_1) = \{x : |x| \leq r_1\},\ x = x_1 + y$, где $y \in B_1$, т.е. $|y| \leq r_1$. В силу того, что $x_1 = \alpha_1 x_0 = \dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2} x_0 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2$, а $y = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2}\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} y \right) = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} y_1$, где $y_1 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} y$, $|y_1| = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} |y| \leq \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} r_1 < \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} r = r$, т.е. $y_1 \in B$, получаем равенство

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2} y_1.$$

Учитывая, что $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \geq 0,\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} \geq 0,\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} = 1,\ y_1 \in B,$ имеем, что $x \in co\{x_2 \cup B\}$.

Замечание 2. $V = x_1 + B_1$ — шаровая окрестность точки x_1 и $V \subset co\{x_2 \cup B\}$, т.е. $x_1 \in \operatorname{int} co\{x_2 \cup B\}$.

Предложение 6. Пусть $B = B(0,r),\ x_0 \in X \Rightarrow \mathrm{co}\{x_0 \cup B\}$ — звездное компактное множество.

Доказательство. Как отмечалось, $B = B(0,r)$ — компактное множество в $X = R^n$; $\{x_0\}$ — компактное $\Rightarrow$, компактным будет и множество $\{x_0 \cup B\}$. Кроме того [2], компактной будет и выпуклая оболочка $co\{x_0 \cup B\}$, откуда $co\{x_0 \cup B\}$ замкнута. Из определения $co\{x_0 \cup B\} \supset B = B(0,r)$. Осталось показать, что каждый исходящий из 0 луч $Lx_0 = \{\alpha y_0, \alpha \geq 0\}$ $(y_0 \neq 0)$ пересекается с границей $frco\{x_0 \cup B\}$ не более чем в одной точке.

Предположим, что $\exists\ y_1 = \beta_1 y_0,\quad y_2 = \beta_2 y_0 \in Ly_0,\quad \beta_1 < \beta_2 : y_1, y_2 \in frco\{x_0 \cup B\}$. Тогда $y_1, y_2 \in co\{x_0 \cup B\}$ в силу замкнутости $co\{x_0 \cup B\}$, откуда $co\{y_2 \cup B\} \subset co\{x_0 \cup B\}$.

Из замечания 2 имеем, что $y_1 \in \operatorname{int} co\{y_2 \cup B\}$, но $\operatorname{int} co\{y_2 \cup B\} \subset \operatorname{int} co\{x_0 \cup B\}$, т.е. $y_1 \in \operatorname{int} co\{x_0 \cup B\}$, следовательно, y_1 не может быть граничной точкой $co\{x_0 \cup B\}$.

Предложение 7. Если U — компактное звездное множество $\Rightarrow coU$ — звездное выпуклое компактное множество.

Доказательство. Так как множество U — компактно, то ([2]) coU — также компактное выпуклое множество,

$0 \in \operatorname{int} U,\ U \subset coU \Rightarrow \operatorname{int} U \subset \operatorname{int} coU,$ откуда $0 \in \operatorname{int} coU$, т.е. $\exists B = B(0,r) \subset coU$.

Предположив, что $(Lx_0 \cap coU) \ni x_1 = \alpha_1 x_0,\ x_2 = \alpha_1 x_0,$ где $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, из замечания 2 получим, что $x_1 \in \operatorname{int} co\{x_2 \cup B\}$. Но $x_2 \in \operatorname{int} coU$; $B \subset coU \Rightarrow co\{x_2 \cup B\} \subset coU$, а тогда $x_1 \in \operatorname{int} coU$, т.е. x_1 не может быть граничной, следовательно, никакой луч Lx не может иметь двух различных граничных точек множества coU.

Далее будем рассматривать точечно-множественные (т.е. сопоставляющие точке множества) отображения, определенные на X и действующие в пространство звездных множеств:

$$S(X): X \to S(X).$$

Отображения наделяются свойствами, связанными с наличием в $S(X)$ алгебраической и порядковой структур, а также представляющими самостоятельный интерес в теории точечно-множественных отображений.

Пусть отображение $f: X \to S(X)$. Если $U \subset X$, то по определению $f(U) = \bigcap\limits_{x \in U} f(x)$, откуда следует, что образ любого множества является замкнутым множеством. Пусть отображение f удовлетворяет условиям:

1) $f(\mathrm{x})$ — выпукло $\forall x \in X$;

2) f положительно однородно, т.е. $f(\alpha x) = \alpha \otimes f(x)\ \ \forall x \in X,\ \forall \alpha \geq 0$;

3) $\exists B = B(0,r): f(x) \supset B\ \ \forall x \in B_0$.

Замечание 3. Из условия положительной однородности f следует, что $f(0) = R^n$. Действительно, так как $f(0)$ звездное, то $0 \in f(0)$. Предположим, что $\exists x \neq 0 : x \notin f(0)$. Пусть $|x| = r > 0$, в силу звездности $f(0)$ существует шар $B_1 = B(0, r_1) \subset: f(0)$, но тогда точка $\frac{r_1}{r} x \in B_1$, так как $\left|\frac{r_1}{r} x\right| = \frac{r_1}{r} r = r_1$, откуда в силу положительной однородности

$$f\left(\frac{r}{r_1}0\right) = f(0) = \frac{r}{r_1} f(0) \supset \frac{r}{r_1} B_1 \supset \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r} x = x.$$

Получили противоречие.

Замечание 4. Условие 3) $f(x) \supset B \quad \forall x \in B_0$ равносильно в $S(X)$ неравенству $f(x) \le B \quad \forall x \in B_0$, т.е. отображение f, рассматриваемое на единичном шаре B_0 в X, является ограниченным сверху в $S(X)$. Кроме того, $\forall x \ne 0$ имеем $x = |x| \cdot \frac{x}{|x|}$, где $\frac{x}{|x|} \in B_0$, тогда

$$f(x) = f\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right) \supset |x| \cdot B = \frac{B}{|x|}.$$

Для отображения f, удовлетворяющего условиям 1)–3), справедливо

Предложение 8. Если U — компактное в X множество $\Rightarrow f(U)$ — выпуклое звездное множество.

Доказательство. Если $U = \{0\}$, то $f(U) = f(0) = R^n$ — звездное и выпуклое. Пусть $U \ne \{0\}$, тогда, по определению, $f(U) = \bigcap\limits_{x \in U} f(x)$ замкнуто и выпукло как пересечение замкнутых и выпуклых множеств $f(x)$.

Покажем, что $f(U)$ содержит некоторый шар $B = B(0,r)$. В силу положительной однородности $f(x) = f\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ $(x \ne 0)$, $f(0) = R^n$ (замечание 2) и $\left|\frac{x}{|x|}\right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$, т.е. $\frac{x}{|x|} \in B_0$.

По определению $f(U) = \bigcap\limits_{x \in U} f(x)$ (можно считать $x \ne 0$, так как $f(0) = R^n$ не влияет на пересечение множеств), $f(U) = \bigcap\limits_{x \in U} f\left(\frac{|x| \cdot x}{|x|}\right) = \bigcap\limits_{x \in U} |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ и с учетом свойства 3) имеем

$$f(U) \supset \bigcap_{x \in U} |x| \otimes B = \bigcap_{x \in U} \frac{B}{|x|}.$$

Евклидова норма $|x|$ — непрерывная функция в X, множество U компактно в X, поэтому $\exists \max\limits_{x \in u} |x| = c < +\infty$ ($c > 0$, так как $U \ne \{0\}$). Но тогда справедливо включение $\frac{B}{|x|} \supset \frac{B}{c} \quad \forall x \in U$ и поэтому $f(U) \supset \frac{B}{c} = B\left(0, \frac{r}{c}\right)$. Для проверки звездности множества $f(U)$ осталось показать, что пересечение границы множества $f(U) = \bigcap\limits_{x \in U} f(x)$ с любым исходящим из 0 лучом не может содержать более одной точки.

Предположим, что найдется луч $Lx_0 = \{\alpha x_0, \alpha \ge 0\} : Lx_0 \cap frf(U) \ni \alpha_1 x_0, \alpha_2 x_0$, где $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Точки $\alpha_1 x_0 \in frf(U)$, $\alpha_2 x_0 \in frf(U)$ в силу замкнутости множества $f(U)$.

Как было показано выше, существует шар $B = B(0,r) \subset f(U)$, а так как $\alpha_2 x_0 \in f(U)$ и $f(U)$ выпукло, то $co\{\alpha_2 x_0 \cup B\} \subset f(U)$.

Из замечания 2 имеем, что $x_1 = \alpha_1 x_0 \in \operatorname{int} co\{\alpha_2 x_0 \cup B\}$, $co\{\alpha_2 x_0 \cup B\} \subset f(U)$, откуда $\operatorname{int} co\{\alpha_2 x_0 \cup B\} \subset \operatorname{int} f(U)$, т.е. $x_1 = \alpha_1 x_0 \in \operatorname{int} f(U)$, а потому точка $x_1 = \alpha_1 x_0$ не может быть граничной точкой множества $f(U)$.

Замечание 5. Для компактности множества $f(U)$ в $X = R^n$ необходима и достаточна замкнутость и ограниченность $f(U)$. Замкнутость $f(U)$ следует из звездности $f(U)$, ограниченность равносильна существованию шара $B = B(0,r) : f(U) \subset B$.

Условие ограниченности множества $f(U)$ можно получить, полагая, например, что $\exists x_0 \in U : f(x_0)$ ограничено (а значит, компактно) в X.

Замечание 6. Так как в условиях предложения 8 образ множества определяется по формуле $f(U) = \bigcap_{x \in U} f(x)$ и $f(U)$ — звездное, то $f(U) = \sup_{x \in U} f(x)$ в пространстве в $S(X)$.

Список литературы

1 *Rubinov A.M. and Jagubov A.A.* The space of star-shaped sets and its applications in nonsmooth optimization. — Jaxenburg, Austria. — 1984.

2 *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — С. 87–94.

Т.Х.Мақажанова

Ақырлы өлшемді кеңістіктердің ішкі кеңістіктерінің дөңестігі мен жұлдыздылығы туралы

Мақалада ақырлы өлшемді евклидтік кеңістіктің жұлдызды ішкі жиындарынан құрған А.М.Рубинов пен А.А.Ягубовтардың кеңістігінің қасиеттері зерттелді. Жұлдызды жиынның анықтамасының топологиялық сипаты бар. Алынған нәтижелер жиындардың дөңестік пен жұлдыздық қасиеттерін және бейнелері мен бейнелеулерін бірге қарастыру мазмұнды болатынын растайды.

T.Kh.Makazhanova

On the convexity and star-shapeness of subsets of finite-dimensional spaces

The properties of space is the space of star-shaped subsets of finite-dimensional Euclidean space building by A.M.Rubinov and A.A.Yagubov in this article was investigated. Determination of the star-shaped set has a topological character. The results obtained in this paper is a joint consideration of the properties of the convexity and star-shapeness of sets and maps with star-shaped images.

References

1 Rubinov A.M. and Jagubov A.A. *The space of star-shaped sets and its applications in nonsmooth optimization*, Jaxenburg, Austria, 1984.

2 Shefer Kh. *Topological vector spaces*, Moscow: Mir, 1971, p. 87–94.