

## Әдебиеттер тізімі

- [1] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003, 608 с.
- [2] Краснов М.И., Киселев А.И., Макаренко Г.И. «Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями» Изд. 3-е, испр. - М.: Едиториал. УРСС, 2003. - 192 с.
- [3] Огородников И. Н. Введение в обратные задачи физической диагностики: специальные главы высшей математики для технологов: учебное пособие— Екатеринбург. Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 199 с.

### ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Дана Бибулова<sup>1</sup>, Бурхан Калимбетов<sup>2</sup>, Касымхан Туреханов<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: danass86@mail.ru

<sup>3</sup>E-mail: kasm-khan@mail.ru

<sup>2</sup>Университет Дружбы Народов имени А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан

<sup>2</sup>E-mail: bkalimbetov@mail.ru

Для исследования дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами применяются асимптотические методы, наиболее известными из которых являются метод расщепления Фещенко-Шкиля-Николенко (1; 2) и метод регуляризации Ломова (3; 4). Метод расщепления в основном применялся для рассмотрения дифференциальных уравнений и задач с интегральным оператором. Однако при исследовании интегро-дифференциальной задачи требовалось, чтобы интегральный оператор был пропорционален малому параметру, что существенно сужает область применения метода расщепления. Метод регуляризации применяется для исследования дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (5; 6; 7). В этих работах подробно рассматриваются вопросы асимптотического анализа решений задач условиях различного поведения спектра предельного оператора, спектральных значений ядра интегрального оператора, быстро осциллирующих компонентов.

В данной работе метод регуляризации С.А. Ломова (3; 4) обобщается на задачи для интегро-дифференциального уравнения с быстроменяющимся ядром и с правой частью, зависящей от быстро осциллирующего показателя степени

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t, s) y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon f(y, t) + h(t) e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Задача (1) рассматривается при следующих условиях:

- 1)  $\mu(t), \beta'(t) \in C^\infty([0, T], R)$ ,  $K(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, R)$ ;
- 2)  $\mu(t) < 0, \beta'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$ ;

3)  $f(y, t)$  есть многочлен, т.е.  $f(y, t) = \sum_{m=0}^N f_m(t)y^m$  с коэффициентами  $f_m(t) \in C^\infty([0, T], R), m = \overline{0, N}, N < \infty$ .

Введем новую функцию

$$z = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t, s)y(s, \varepsilon) ds.$$

Дифференцируя по переменному  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= K(t, t)y + \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} y(s, \varepsilon) ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varepsilon \frac{dz}{dt} &= \mu(t)z + \varepsilon K(t, t)y + \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} y(s, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Вместо (1) получим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dw}{dt} &= A(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} G(t, s)w(s, \varepsilon) ds + \\ &+ \varepsilon F(w, t) + H(t, \varepsilon), \quad w(0, \varepsilon) = w^0 \equiv \{y^0, 0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $w = \{y, z\}$ ,  $F(w, t) = \{f(y, t), 0\}$ ,  $H(t, \varepsilon) = \{h(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, 0\}$ , а матрицы  $A(t)$ ,  $A_1(t)$ ,  $G(t, s)$  имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для удобства обозначим  $\lambda_1(t) \equiv i\beta'(t)$ ,  $\lambda_2(t) \equiv \mu(t)$ .

Введем регуляризующие переменные (см. (3));

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = 1, 2$$

и рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{w} - \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_2(\theta) d\theta} G(t, s)\tilde{w} \left( s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) ds - \\ - \varepsilon A_1(t)\tilde{w} = \varepsilon F(\tilde{w}, t) + H(t, \tau), \quad \tilde{w}(t, \tau, \sigma, \varepsilon) \Big|_{t=0, \tau=0, \sigma=e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}} = w^0, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $H(t, \tau) = \{h(t)e^{\tau_1 \sigma}, 0\}$ ,  $\sigma = e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}$ , для функции  $\tilde{w} = \tilde{w}(t, \tau, \sigma, \varepsilon)$ , где  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ . Ясно, что  $\tilde{w} = \tilde{w}(t, \tau, \sigma, \varepsilon)$  решение задачи (3), то вектор-функция  $w = \tilde{w} \left( t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon \right)$  является точным решением задачи (2); следовательно, задача (3) является расширенной относительно задачи (2).

Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, поскольку не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{w} \equiv J \left( \tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) \Big|_{t=s, \tau=\frac{\psi(s)}{\varepsilon}} \right) = \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_2(\theta) d\theta} G(t, s) \tilde{w} \left( s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) ds$$

Для его регуляризации, введем класс  $M_\varepsilon = U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ , который асимптотически инвариантен относительно оператора (см. (3), р. 62)]. В этом случае мы пространству  $U$  примем как пространство векторных функций, представимых суммами вида

$$\begin{aligned} w(t, \tau, \sigma) &= w_0(t, \sigma) + \sum_{j=1}^2 w_j(t, \sigma) e^{\tau_j} + \sum_{|m| \geq 2} w^{(m)}(t, \sigma) e^{(m, \tau)}, \\ w_j(t, \sigma), w^{(m)}(t, \sigma) &\in C^\infty([0, T], C), j = \overline{0, 2}, 2 \leq |m| \leq N_w. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $m = (m_1, m_2)$  есть мультииндекс,  $|m| = m_1 + m_2$ . Асимптотическая инвариантность класса  $M_\varepsilon$ , относительно интегрального оператора  $J$ , подробно изложены в работах (3; 5; 6; 7).

Произведя регуляризацию интегрального члена, получим регулярно возмущенную задачу следующего вида

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{w} - \varepsilon A_1(t) \tilde{w} - \varepsilon \tilde{J} \tilde{w} &= \\ = \varepsilon F(\tilde{w}, t) + H(t, \tau), \tilde{w}(t, \tau, \sigma, \varepsilon) \Big|_{t=0, \tau=0, \sigma=e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}} &= w^0, \end{aligned} \quad (5)$$

где расширенный интегральный оператор  $\tilde{J}$  определяется формулой:

$$\tilde{J} \tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) \stackrel{def}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{s=0}^{\nu} R_{\nu-s} w_s(t, \tau).$$

Решение расширенной задачи (5) определим в виде ряда:

$$\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t, \tau) \quad (6)$$

Подставляя (6) в задачу (5) и приравнявая коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим следующие итерационные задачи для коэффициентов  $w_k(t, \tau)$ , ряда (6):

$$L_0 w_0(t, \tau) \equiv \sum_{j=1}^2 \lambda_j(t) \frac{\partial w_0}{\partial \tau_j} - A(t) w_0 = \begin{pmatrix} h(t) \sigma \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau_1}, w_0(0, 0) = w^0; \quad (7_0)$$

$$L_0 w_1(t, \tau) = -\frac{\partial w_0}{\partial t} + A_1(t) w_0 + F(w_0, t) + R_0 w_0, w_1(0, 0) = 0; \quad (7_1)$$

$$L_0 w_2(t, \tau) = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + A_1(t) w_1 + \frac{\partial F(w_0, t)}{\partial t} w_1 + R_0 w_1 + R_1 w_0, w_2(0, 0) = 0; \quad (7_2)$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ L_0 w_k(t, \tau) &= -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + A_1(t)w_{k-1} + P_k(w_0, \dots, w_{k-1}, t) + \\ & + R_0 w_{k-1} + R_1 w_{k-2} + \dots + R_k w_0, \quad w_k(0, 0) = 0, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{7_k}$$

где  $P_k(w_0, \dots, w_{k-1}, t)$  некоторый линейный многочлен  $w_0, \dots, w_{k-1}$ , относительно  $w_{k-1}$ ,

$$\begin{aligned} R_0 w(t, \tau) &= e^{\tau_2} \int_0^t G(t, s)w_2(s)ds, \\ R_1 w(t, \tau) &= [(I_0^0(G(t, s)w_0(s)))_{s=t} - (I_0^0(G(t, s)w_0(s)))_{s=0} e^{\tau_2}] + \\ & + [(I_1^0(G(t, s)w_1(s)))_{s=t} e^{\tau_1} - (I_1^0(G(t, s)w_1(s)))_{s=0} e^{\tau_2}] + \\ & + \sum_{|m| \geq 2}^{N_w} [(I_m^0(G(t, s)w^{(m)}(s)))_{s=t} e^{(m, \tau)} - (I_m^0(G(t, s)w^{(m)}(s)))_{s=0} e^{\tau_2}], \end{aligned}$$

интегральные операторы порядка.

Переходя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач (7<sub>k</sub>), вычисляем собственные векторы  $\varphi_j(t)$  и  $\chi_j(t)$  матриц  $A(t)$  и  $A^*(t)$  соответственно. Легко проверить, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \{1, 0\}, \quad \varphi_2(t) = \left\{ \frac{1}{\mu(t)}, 1 \right\} \equiv \left\{ \frac{1}{\lambda_2(t)}, 1 \right\}, \\ \chi_0(t) &= \left\{ 1, -\frac{1}{\mu(t)} \right\} \equiv \left\{ 1, -\frac{1}{\lambda_2(t)} \right\}, \quad \chi_2(t) = \{0, 1\} \end{aligned}$$

и  $\varphi_0(t), \varphi_2(t)$  соответствуют собственным значениям  $\lambda_0(t) \equiv 0, \lambda_2(t) \equiv \mu(t)$  матрицы  $A(t)$ , а  $\chi_0(t), \chi_2(t)$  соответствуют собственным значениям  $\bar{\lambda}_0(t) \equiv 0, \bar{\lambda}_2(t) \equiv \mu(t)$  матрицы  $A^*(t)$  соответственно.

Каждый из итерационных систем имеет вид

$$L_0 w(t, \tau) \equiv \sum_{j=1}^2 \lambda_j(t) \frac{\partial w}{\partial \tau_j} - A(t)w = P(t, \tau), \tag{8}$$

где  $P(t, \tau) = P_0(t) + \sum_{j=1}^2 P_j(t)e^{\tau_j} + \sum_{|m| \geq 2}^{N_P} P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} \in U$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия 1) – 3) и  $P(t, \tau) \in U$ . Для того чтобы система (8) имела решение в  $U$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle P_j(t), \chi_j(t) \rangle = 0, \quad j = 0, 2, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{9}$$

**Замечание.** Если выполнены условия (9), то, то система (8) имеет следующее решение в пространстве  $U$ :

$$\begin{aligned} w(t, \tau) &= \alpha_0(t)\varphi_0(t) + \frac{(P_0(t), \chi_2(t))}{-\lambda_2(t)}\varphi_2(t) + \left[ \frac{(P_1(t), \chi_0(t))}{\lambda_1(t)}\varphi_0(t) + \right. \\ & + \left. \frac{(P_1(t), \chi_2(t))}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}\varphi_2(t) \right] e^{\tau_1} + \left[ \alpha_2(t)\varphi_2(t) + \frac{(P_2(t), \chi_0(t))}{\lambda_2(t)}\varphi_0(t) \right] e^{\tau_2} + \\ & + \sum_{|m|=2}^{N_P} \{ [(m, \lambda(t))I - A(t)]^{-1} P^{(m)}(t) \} e^{(m, \tau)}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_j(t) \in C^\infty([0, T], C)$  – произвольные функции,  $j = 0, 2$ .

Мы не будем доказывать однозначную разрешимость итерационных задач. Отметим, что при решении двух последовательных итерационных задач  $(7_m)$  и  $(7_{m+1})$  решение задачи  $(7_m)$  в пространстве  $U$  будет найдено единственным образом.

## Список литературы

- [1] Феценко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д., Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных операторов, Наукова Думка, Киев, 1966.
- [2] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве, Наука, Наука, М., 1970.
- [3] Ломов С. А., Введение в общую теорию сингулярных возмущений, Наука, М., 1981, 400 с.
- [4] Ломов С. А., Ломов И. С., Основы математической теории пограничного слоя, Издательство Московского университета, М., 2011, 456 с.
- [5] Рыжих А. Д. “Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнение с быстро осциллирующими коэффициентами”, Труды МЭИ, 357 (1978), 92-94.
- [6] Kalimbetov B. T., Safonov V. F., Tuychiev O. D., “Singular perturbed integral equations with rapidly oscillation coefficients”, SEMR, 17 (2020), 2068–2083, DOI: 10.33048/semi.2020.17.138.
- [7] Bobodzhanov A.A., Kalimbetov B. T., Safonov V. F., “Generalization of the regularization method to singularly perturbed integro-differential systems of equations with rapidly oscillating inhomogeneity”, Axioms, 10 (2021), No 1, 40. <https://doi.org/10.3390/axioms10010040>.

## ОБЩЕЕ ДРОБНО-ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СТРУНЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Бименов М.А.<sup>1</sup>, Садыбеков М.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Центрально Азиатский Инновационный университет, Шымкент, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: bimenov@mail.ru

<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>E-mail: sadybekov@math.kz

В докладе рассматривается обобщённое дробное по времени дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$r(x)D_*^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

с классическими начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \right|_{t=0+} = g_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (2)$$