УДК 519.17:519.876

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: 22Gulim1988@mail.ru)

Исследование объектов и процессов, имеющих многовариантные сетевые структуры, с помощью теории графов и сетевого моделирования

Освещены теоретические и прикладные вопросы теории графов. Рассмотрены основные понятия и проблемы теории графов. Раскрыты возможности использования теории графов при решении различных задач в области экономики и управления. Предложен системный анализ производства торфяных композиционных материалов на основе разработанной топологической модели. Изложены общие понятия о системах сетевого планирования и управления применительно к горной промышленности. Приведены правила построения сетевых графиков. Даны определения полного, частного и свободного резервов времени с пояснениями их практического значения. Проанализированы формулы и на конкретном примере показаны методы расчетов всех видов резервов времени.

Ключевые слова: теория графов, вклад, типы графов, цикл, задачи, технологические схемы, системный анализ, сетевой график, работа, событие, путь, расчет.

Причины нарастания интереса к теории графов

Применение сетевых (объемно-операционных) методов планирования и управления (система СПУ) связано с представлением комплекса работ в виде сетевой модели. Основой таких моделей являются математические объекты, называемые графами, на которых заданы количественные параметры.

Теория графов «открывалась» много раз и ее с полным основанием можно считать разделом современной прикладной математики [1–3].

Кстати, наиболее раннее известное упоминание этой теории встречается в работах Эйлера, и хотя проблему, которой он занимался, можно рассматривать как обычную головоломку, все же она возникла из практики.

Последующие переоткрытия теории графов Кирхгофом и Кэли также уходят своими корнями в реальную действительность. Изучение Кирхгофом электрических цепей привело к разработке им основных понятий и получению ряда теорем, касающихся деревьев в графах. В свою очередь Кэли подошел к исследованию деревьев, решая задачи перечисления органических изомеров. Другой подход к графам, связанный с рассмотрением головоломок, был предложен Гамильтоном. После этого появилась знаменитая гипотеза — проблема четырех красок, впервые поставленная перед математиками Де Морганом около 1850 года. Никакая другая проблема не вызывала столь многочисленных и остроумных работ в области теории графов. Благодаря своей простой формулировке и раздражающей неуловимости она до сих пор остается мощным стимулом исследований различных свойств графов.

Двадцатое столетие стало свидетелем неуклонного развития теории графов. В конце прошлого столетия и в начале XXI века возникло несколько причин особого нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов уже активно применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование вычислительных машин, электротехника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ. Достоверно и то, что теория графов служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение. Графы обладают эстетической привлекательностью благодаря их представлению в виде диаграмм.

В последние 10–15 лет теория графов дает простой, доступный и мощный инструмент для построения моделей и решения задач упорядочения объектов. В настоящее время существует множество проблем, где требуется построить некоторые сложные системы с помощью определенного упорядочения их элементов. Сюда относятся календарное планирование промышленного производства, задачи теории сетевого планирования и управления (СПУ), тактические и логические задачи, проблемы построения систем связи и исследования процессов передачи информации, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, методы построения электрических сетей, задачи идентификаций в органической химии и способы построения переключательных схем. Такими же являются большой круг экономических задач, проблемы выбора структуры социальных групп, игровые задачи и головоломки и т. д. Таким образом, область возможных применений теории графов очень широка. Комбинаторные методы нахождения нужного упорядочения объектов существенно отличаются от классических методов анализа поведения систем с помощью уравнений. Кроме языка теории графов, задачи упорядочнения объектов можно формулировать в терминах теории матриц с элементами ноль – один, или в терминах теории конечных множеств.

Однако с полным основанием можно сказать, что теория графов является одним из простейших и наиболее элегантных разделов современной математики с широкой областью применения. Имея в своей основе простейшие идеи и элементы: точки, соединенные линиями, теория графов строит из них богатое многообразие форм, наделяет эти формы интересными свойствами и в результате становится полезным инструментом при исследовании самых разнообразных систем. Кроме того, теория графов внесла большой вклад в разработку методов анализа широкого круга комбинаторных проблем.

Основные типы графов

Большинство специалистов по теории графов употребляют в книгах, статьях и лекциях свою собственную терминологию. На конференциях по теории графов каждый выступающий, чтобы избежать неправильного понимания, считает необходимым определить прежде всего язык, которым он будет пользоваться. Даже само слово «граф» не является священным. Некоторые авторы действительно определяют «граф» как граф, другие же имеют в виду такие понятия, как мультиграф, псевдограф, ориентированный граф или сеть. Поэтому встает необходимость сформулировать ряд определений, чтобы в дальнейшем иметь возможность использовать основные понятия и терминологию теории графов.

Граф — это схема, состоящая из нескольких точек и соединяющих их линий.

Точки x_1, x_2, $\ldots$ называются вершинами графа. Множество всех вершин обозначим через X.

Линии $u_{1.2,}$ $u_{1.3,}\ldots,$ соединяющие вершины графа и называемые ребрами, отражают определенные отношения, связи в множестве X, представленном вершинами графа. Ребра могут иметь определенную ориентацию; ориентированные ребра будем называть дугами.

Множество дуг (ребер) графа обозначим через U, а сами дуги (ребра) — буквами $u_{ij}\left(i, j=1,\ 2,\ \ldots\ n\right)$.

Граф будем обозначать символом $G = (X, U)$, или $G(X, U)$.

Примерами графов могут служить схемы дорог, соединяющие города; родственные отношения в множестве людей; правила игры, приводящие к различным ситуациям; связи между физическими объектами и т. д.

Граф называется неориентированным, если каждое его ребро не ориентировано, и ориентированным, если ориентированы все его ребра. На рисунке 1 приведены примеры неориентированных графов, а на рисунке 2 изображены ориентированные графы.

В ряде случаев естественно рассматривать смешанные графы, имеющие как ориентированные, так и неориентированные ребра. Например, план города можно рассматривать как граф, в котором ребра представляют улицы, а вершины — перекрестки; при этом по одним улицам может допускаться лишь одностороннее движение, и тогда на соответствующих ребрах вводится ориентация; по другим улицам — движение двустороннее, и на соответствующих ребрах уже никакой ориентации не вводится [4, 5].

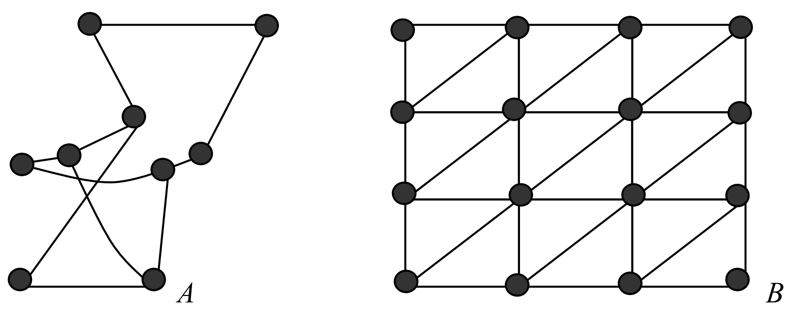


Рисунок 1. Неориентированные графы

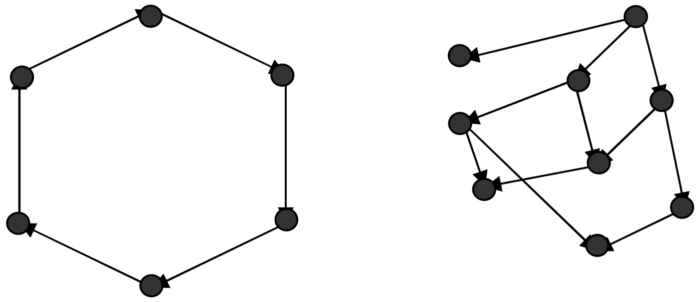


Рисунок 2. Ориентированные графы

Граф G_0, состоящий из вершин, несоединенных ребрами, называют нуль-графом (рис. 3).

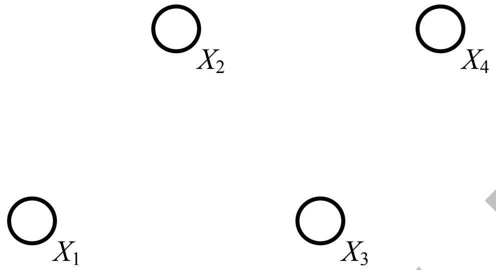


Рисунок 3. Нуль-граф

Нуль-граф не содержит информации о том, как связаны между собой элементы множества x_i.

Подграфом графа $G(X,U)$ называется граф $G_1(Y,V)$, множество вершин Y которого является подмножеством вершин X графа G, а дугами — часть дуг графа G, оба конца которых лежат в множестве Y.

Частичным графом называется граф $G(X,V)$, содержащий все вершины графа $G(X,U)$, но не содержащий некоторых дуг.

В теории графов дается также понятие мультиграфа [6].

Граф $G(X,U)$, у которого хотя бы одна пара вершин x_i и y_i $(x_i \in X,\ \mathrm{x}_\mathrm{j} \in X)$ соединяется с более чем одной дугой (ребром), называется мультиграфом (рис. 4).

Граф называется конечным, если число его вершин $|X| = N$ конечно.

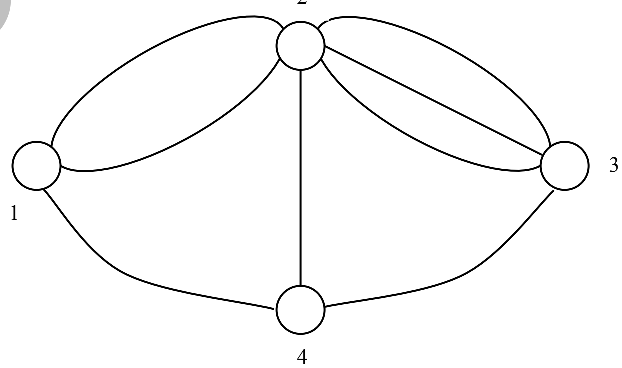


Рисунок 4. Мультиграф

Граф называется полным, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром (рис. 5).

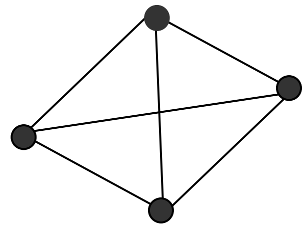


Рисунок 5. Полный граф

Граф называют плоским, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины.

Рисунок графа, в котором никакие два его ребра не пересекаются, если не считать точками пересечения общие вершины, называют плоским представлением графа. Ясно, что плоское представление имеет только плоский граф. Обратно, у всякого плоского графа непременно найдется плоское представление [7].

Последовательность ребер, в которой у каждого ребра одна из граничных вершин является также граничной вершиной предыдущего ребра, а другая — граничной вершиной последующего ребра, называется цепью.

Граф $G(X,U)$ называется связным, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Цикл — это конечная цепь, которая начинается в некоторой вершине x_i и оканчивается в той же вершине x_i; цикл называется простым, если все его ребра различны, и составным — в противном случае; наконец, цикл, при обходе которого ни одна вершина не встречается дважды, называется элементарным.

При изображении графов на рисунках или схемах отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными; длины отрезков и расположение точек произвольны.

Задачи, послужившие основой теории графов

1. Задача о кенигсбергских мостах.

Начало теории графов как математической дисциплине было положено Эйлером в его знаменитом рассуждении о кенигсбергских мостах.

Кенигсберг (теперь Калининград) расположен на обоих берегах реки Преголя и на двух островах этой реки. Берега реки и два острова соединены семью мостами, как показано на карте (рис. 6).

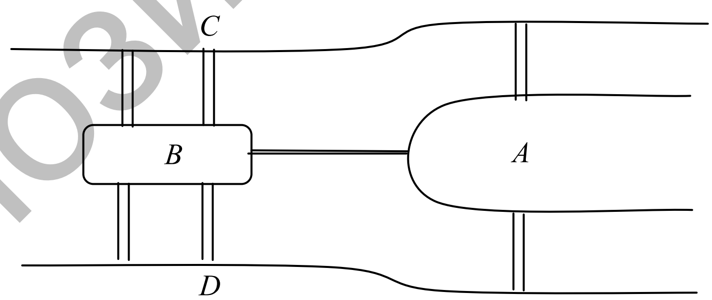


Рисунок 6. Карта Кенигсберга

Вопрос — поставленный в 1736 году — состоит в том, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз [8].

Исключительный вклад Эйлера в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.

Для доказательства того, что задача не имеет решения, Эйлер обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост — линией (ребром), соединяющей соответствующие точки. Получился «граф». Этот граф (полностью неориентированный мультиграф, отвечающий задаче) показан на рисунке 7, где точки отмечены теми же буквами, что и четыре части суши на рисунке 6.

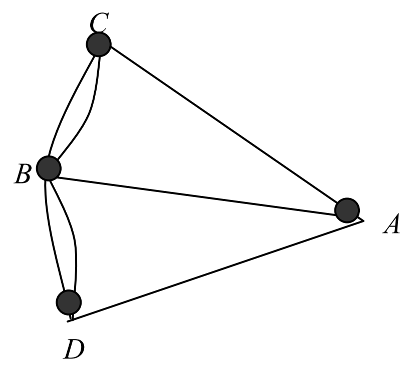


Рисунок 7. Граф к задаче о кенигсбергских мостах

Утверждение о несуществовании «положительного» решения у этой задачи эквивалентно утверждению о невозможности обойти специальным образом граф, представленный на рисунке 7.

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашел критерий существования обхода (специального маршрута) у данного графа, а именно граф должен быть связным и каждая его вершина должна быть инцидентна четному числу ребер. Граф, показанный на рисунке 7, связный, но не каждая его вершина инцидентна четному числу ребер.

Следовательно, на языке графов поставленная задача формулируется так: существует ли в мультиграфе простой цикл, содержащий все ребра (эйлеров цикл).

Л.Эйлер сформулировал и доказал необходимое и достаточное условие того, чтобы в произвольном, полностью неориентированном связном мультиграфе существовал эйлеров цикл. Этот результат ознаменовал рождение теории графов.

2. Задача о химических изомерах.

Занимаясь чисто практическими задачами органической химии, английский математик Кэли в 1857 г. открыл важный класс графов, называемых деревьями.

Он стремился перечислить изомеры предельных (насыщенных) углеводородов C_nH_{2n+2} с данным числом n атомов углерода; некоторые из таких углеводородов показаны на рисунке 8.

Конечно, Кэли прежде всего сформулировал задачу абстрактно: найти число всех деревьев с p вершинами, каждое из которых имеет вершины со степенями 1 и 4. Ему не удалось сразу решить эту задачу, и он стал изменять ее формулировку таким образом, чтобы можно было решить новую задачу о перечислении: а) корневых деревьев (в которых выделена одна из вершин); б) всех деревьев; в) деревьев, у которых степени вершин не превышают 4, и, наконец, г) деревьев, у которых степени вершин равны 1 и 4 (постановка задачи «из химии») [9; 15, 16].

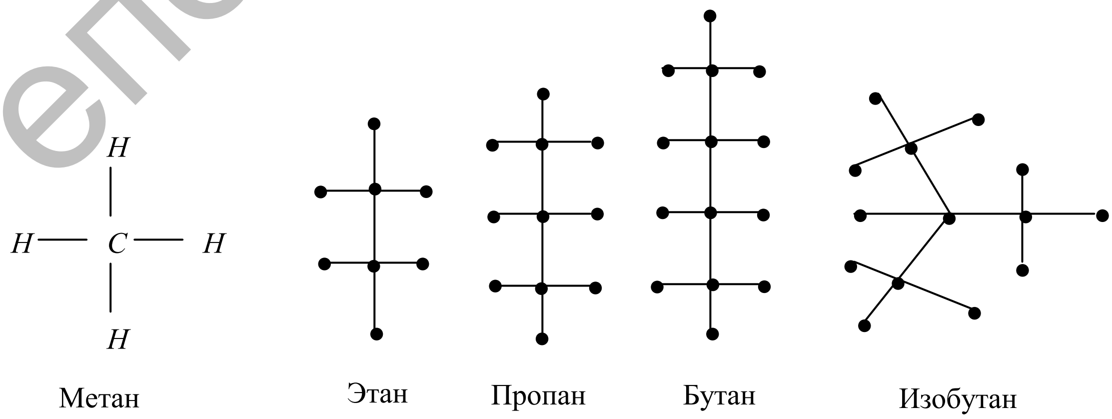


Рисунок 8. Наименьшие насыщенные углеводороды

3. Задача «Вокруг света».

В игре, придуманной В. Гамильтоном в 1859 г., используется додекаэдр, каждой из 20 вершин которого приписано название известного города. Играющий должен обойти «вокруг света», найдя такой замкнутый путь, идущий по ребрам многогранника, который проходил бы через каждую вершину ровно один раз. Гамильтон продал свою идею одному мастеру игрушек, хотя описанная игра не сулила никакой финансовой удачи.

На языке теории графов задача формулируется так: найти остовный цикл в графе додекаэдра [9; 16, 17]. Граф показан на рисунке 9.

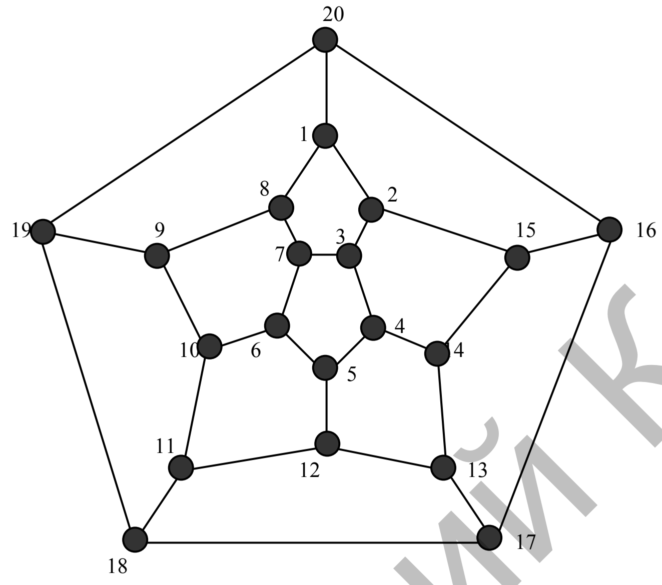


Рисунок 9. «Вокруг света» (игра, придуманная сэром В.Гамильтоном)

Вершины графа пронумерованы числами 1,2,… 20 (вместо названий городов, скажем Амстердам, Анн-Арбор, Берлин, Будапешт, Дублин, Эдинбург, Иерусалим, Лондон, Мельбурн, Москва, Новосибирск, Нью-Йорк, Париж, Пекин, Прага, Рио-де-Жанейро, Рим, Сан-Франциско, Токио и Варшава). Существование остовного цикла очевидно.

4. Задача (гипотеза) о четырех красках.

Наиболее известная нерешенная задача в теории графов и, возможно, во всей математике — знаменитая проблема четырех красок. Эту замечательную задачу каждый математик в течение пяти минут может объяснить любому прохожему на улице. В конце объяснения оба будут хорошо понимать проблему, но не будут способны ее решить.

Формулировка этой задачи проста: можно ли на любой политико-административной карте раскрасить страны так, чтобы никакие две страны, имеющие общую границу, не были раскрашены одинаковой краской, и чтобы были использованы всего четыре краски? Уточним, что если две страны граничат по точке, то они не считаются имеющими общую границу.

В терминах графов задача может быть поставлена следующим образом. Дан произвольный полностью неориентированный плоский граф G. Можно ли каждую вершину графа G раскрасить с помощью одной из четырех красок так, чтобы никакие две смежные вершины (вершины, соединенные хотя бы одним ребром) не были раскрашены в один цвет.

Математиками доказана теорема о том, что любой плоский граф может быть раскрашен с помощью пяти красок. Тем не менее, проблема четырех красок до сих пор не решена. Удалось лишь доказать, что такую раскраску можно осуществить для всех плоских графов с числом вершин, не превосходящим 38 [10].

Задача эта приобрела известность с 1878 г., когда английский математик Кэли привел ее формулировку на заседании английского королевского научного общества; добавив, что не мог ее решить, хотя и размышлял над ней длительное время. С тех пор многие выдающиеся математики пробовали свои силы в решении этой задачи.

Построение графа для выявления оптимальной технологической схемы, обеспечивающей максимальную производительность труда на шахте

В последнее время теория графов стала привлекаться для топологического исследования электрических цепей, для решения задач о нахождении кратчайшего пути между поставщиком и потребителем, задач о выборе рациональных средств транспорта по сети выработок шахты при заданных грузопотоках и длинах транспортирования, об определении рациональных параметров технологической цепи горного предприятия и т.д.

Последняя из перечисленных задач формулируется следующим образом: найти критический путь в сети, составленной из цепи технологических процессов шахты, при котором максимизируется уровень производительности труда по шахте или минимизируется себестоимость. В данном случае в качестве отправного пункта принимаются конкретные горно-геологические условия залегания пласта и соответствующий уровень производительности труда.

Затем строится технологическая цепочка с указанием основных технологических процессов и узловых пунктов технологической схемы.

В качестве основных технологических процессов комплекса подземной угледобычи принимаются следующие: работа на поверхности шахты; подъем; работы в околоствольном дворе; транспорт по капитальному квершлагу; транспорт по бремсбергу (уклону); транспорт по этажному (ярусному) штреку; весь комплекс добычных работ в очистном забое (лаве).

Узловыми пунктами технологических схем соответственно намечаются следующие:

поверхность — работы на поверхности	
устье стволов (штолен);	подъем;
околоствольный двор;	
начало квершлага,	транспорт по капитальному квершлагу;
конец квершлага;	
начало капитального бремсберга (уклона);	транспорт по
конец капитального бремсберга (уклона);	бремсбергу (уклону);
начало откаточного штрека;	
конец откаточного штрека;	транспорт по штреку
очистной забой — очистные работы в забое (лаве)	

Далее по каждому технологическому процессу, протекающему между двумя узловыми пунктами, намечаются и разрабатываются конкретные технологические решения и осуществляется их оценка по заданному критерию — трудоемкости работ по процессам. Узловым пунктам придаются номера по порядку.

Следующим этапом исследования является анализ совместности каждого технологического решения в общей технологической цепи. Получив указанные данные, можно построить граф для расчета и выявления оптимальной технологической схемы, т.е. схемы, обеспечивающей минимальную трудоемкость или максимальную производительность труда на шахте.

Решение задачи производства торфяных композиционных материалов с помощью аппарата теории графов

Под торфяными композиционными материалами понимаются материалы, включающие не менее двух компонентов, один из которых торф. При этом торф рассматривается как квазиоднородный материал. При рассмотрении основных направлений производства торфяной продукции прослеживается тенденция расширения использования в качестве сырья отходов различных производств, при этом решаются актуальные проблемы охраны окружающей среды, обеспечения регионов удобрением, топливом, строительными и другими материалами, повышается экономическая эффективность производства за счет комплексного использования местных ресурсов.

Рациональное использование торфяных и вторичных ресурсов позволяет выделить ряд обобщающих моментов: обе эти проблемы относятся к региональным и наиболее эффективно могут решаться в рамках комплексного ресурсопользования конкретного региона. К настоящему времени научно обоснованы, разработаны и прошли практическую апробацию эффективные способы и технологии переработки торфа и различных отходов, в том числе и предусматривающие совместную переработку. Созданы научно-технический задел и практические предпосылки к увеличению объема выпуска и расширению ассортимента торфяной композиционной продукции и сферы ее использования, особенно в металлургических процессах и технологиях. Одним из факторов, сдерживающих активную переработку торфа и различных отходов, является отсутствие методологической базы комплексной оценки технологической, экологической, экономической эффективности производства и потребления торфяных композиционных материалов, в том числе с использованием в качестве сырья производственных отходов [11; 15].

В настоящее время для решения комплексов задач в управлении наиболее эффективно используется системный подход. Он основан на рассмотрении объекта исследования как единого целого, на установлении свойств и связей объекта, на выделении факторов, наиболее важных для достижения поставленных целей. Данный подход может быть использован для предсказания поведения объектов в будущем. Системный подход к исследованию организационных проблем позволяет рассматривать воздействие при управлении на все структурные и функциональные элементы экономической системы, а не на какую-либо ее часть [12].

Целесообразность и эффективность системного подхода при решении задач производства торфяных композиционных материалов обусловлены возможностью статической и динамической оценки технического уровня, экологической безопасности, экономической эффективности всего процесса — от разведки сырьевых источников до получения конечного продукта и его использования потребителями.

Системный анализ на основе модельных представлений системы позволяет взаимно увязать решение различных задач — технических, экологических, экономических. Система производства и потребления торфяных композиционных материалов может быть представлена в виде полного графа производства G, являющегося топологической моделью системы (рис. 10).

Граф G позволяет отобразить в сжатой и наглядной форме большое количество информации. Вершины графа соответствуют элементам, представляющим отдельные операции процесса, ребра — потокам между вершинами графа, благодаря чему уже заранее получается картина некоторых свойств и качественных отношений рассматриваемой системы.

Граф отображает полное множество событий: транспортные процессы сырья, трансформационные процессы переработки, пространственное расположение процессов, потоки энергии, затрат, материалов, необходимые для процесса переработки, связи технологического оборудования, т.е. логику работы системы, транспортные процессы распределения продукции. Вершины графа G разбиты по уровням.

Вершины первого уровня образуют подграф G_1, соответствующий подсистеме «Сырьевые ресурсы». Вершины второго уровня образуют подграф G_2, соответствующий подсистеме «Добыча сырья и его переработка», и вершины третьего уровня — подграф G_3, соответствующий подсистеме «Потребление торфяных композиционных материалов и их маркетинг».

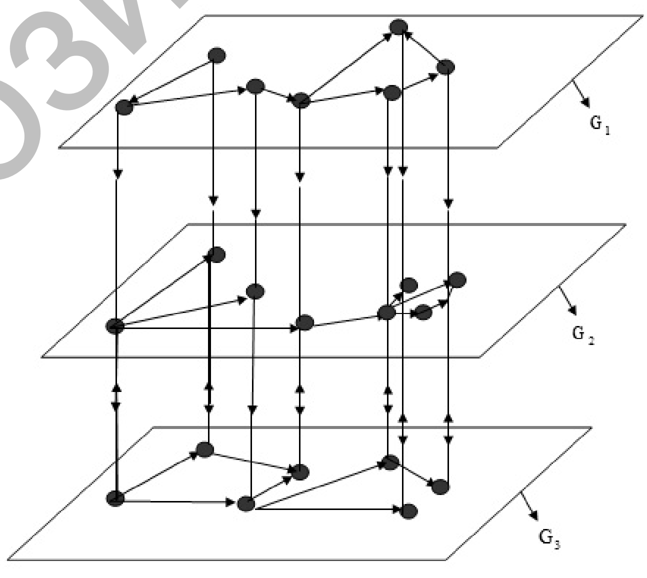


Рисунок 10. Топологическая модель системы

Примечание. Данные работы [11; 16].

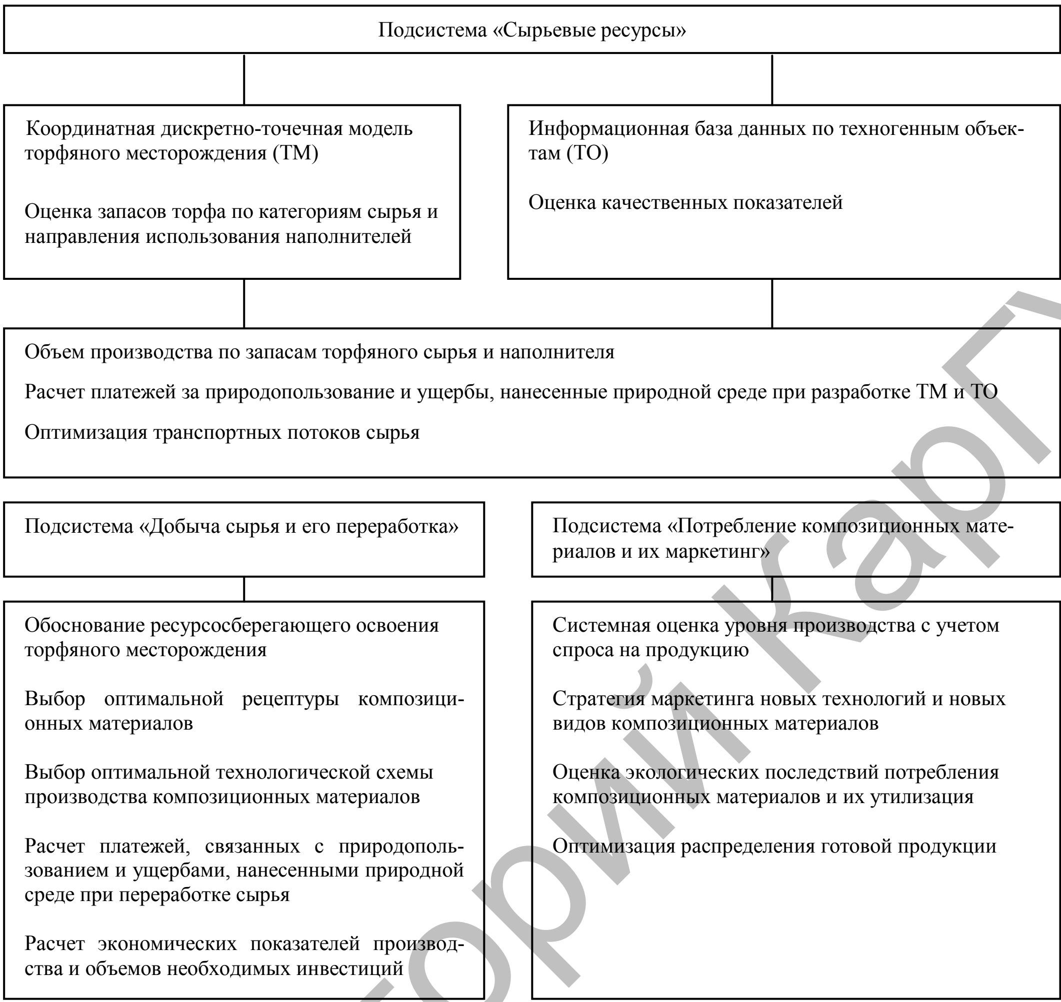


Рисунок 11. Структура системной модели

Примечание. Данные работы [11; 17].

Решение некоторых задач осуществляется в рамках одной подсистемы. Для решения других необходимо использование элементов подсистем, расположенных на соседних уровнях графа G. В общем случае каждая отдельная задача может быть представлена некоторым подграфом, вершины которого могут принадлежать как одной, так и нескольким подсистемам. Использование полного графа производства G позволяет применить системный подход для комплексной оценки эффективности производства и потребления торфяных композиционных материалов.

Сетевая модель комплекса операций

Особое место среди методов, применяемых в горном деле в проектировании, планировании и управлении, занимает сетевое моделирование (система сетевого планирования и управления — СПУ).

Основным плановым документом в системах СПУ является сетевой график (или просто сеть комплекса), представляющий собой информационно-динамическую модель, в которой изображаются взаимосвязи и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели разработки. Кроме сети, модель содержит и другие характеристики (временные, стоимостные, ресурсные), относящиеся к отдельным работам и всему комплексу. В сетевом графике детально или укрупненно показывается что, в какой последовательности, когда (за какое время), для чего необходимо выполнить, чтобы обеспечить окончание всех работ не позже заданного (директивного) срока.

В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа.

Теория графов оперирует понятием пути, под которым понимается такая последовательность ребер, когда конец каждого предыдущего ребра совпадает с началом последующего, т. е. конечная вершина каждой предыдущей дуги совпадает с начальной вершиной следующей дуги. Понятие контура означает конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной.

Сетевой график — это ориентированный граф без контуров, ребра которого имеют одну или несколько числовых характеристик [13].

Таким образом, в отличие от ленточного графика, где основным является только один элемент — работа, в сетевом графике, как правило, имеются два основных элемента – работа и событие.

Под работой (операцией) понимается прежде всего обычный смысл этого слова, т.е. некоторый трудовой процесс, для выполнения которого требуются затраты времени и ресурсов (например, доставка оборудования, его монтаж, проведение выработки, выемка угля). Описание любой работы как процесса включает исполнителей работы, используемые технические средства, орудия труда, затрачиваемые в процессе работы ресурсы, и выходной продукт, создание которого является целью работы. Например, при проведении выработки указывают состав проходческой бригады, применяемое проходческое оборудование, расход электроэнергии, взрывчатых веществ, материалов для оформления выработки. Выходом работы является выработка заданной конфигурации. Объем выходного «продукта» в рассматриваемом примере измеряется в длине пройденной выработки.

Основной характеристикой работы является ее длительность. Время выполнения большого числа работ не является постоянной величиной. Оно зависит от количества привлеченных к работе ресурсов (людских и материальных средств). Часто все затраты ресурсов можно оценить в денежном выражении. Для количественной оценки ресурсов, используемых для выполнения работы, обычно берут две величины — объем работ Q и интенсивность использования ресурсов q.

Объем работы характеризуется общим количеством необходимых затрат как ресурсов, так и времени и измеряется их произведением. Если рассматриваются людские ресурсы, то объем работы называется ее трудоемкостью. Довольно часто объем работы является величиной постоянной. Для работ с постоянным объемом (трудоемкостью) зависимость времени ее выполнения от количества затрачиваемых при этом ресурсов представляет собой гиперболу [5; 119].

Интенсивность q — это количество ресурсов, используемых в работе в данный момент времени. Значение интенсивности может ограничиваться количеством ресурсов, выделенных для выполнения работы, а также рядом физических условий. Например, из-за стесненности численность рабочих в горной выработке на одной работе (операции) ограничена до 4–5 в смену.

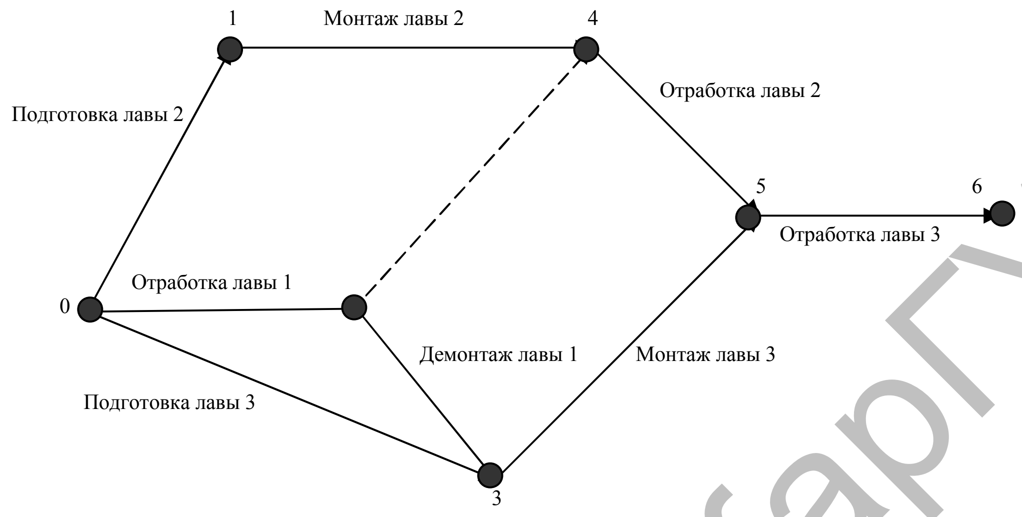
В понятие работы включается также процесс ожидания. Такая работа требует только затрат времени (например, затвердение бетона при воздействии постоянной крепи). К ожиданиям относятся технологические перерывы.

Для отражения логической связи между работами используется понятие фиктивной работы – работы, не потребляющей ни ресурсов, ни времени, но указывающей, что начало выполнения некоторых работ возможно только после завершения других работ.

Другим понятием, используемым при описании комплекса работ, является событие. Событие представляет собой факт окончания одних (предшествующих данному событию) работ и возможность начала других работ, следующих непосредственно за данным событием. Событие не является процессом и не имеет продолжительности во времени. Это только момент времени, соответствующий завершению всех работ, входящих в событие.

В зависимости от способа отображения комплекса работ на графе, каждой работе которого соответствуют дуга (при первом способе) и (при втором способе) вершина этого графа, различают два варианта сетевых моделей (графиков): с ориентацией на события-работы (на языке событий) и с ориентацией на работы-связи (на языке работ). Оба варианта графиков показаны на рисунке 12.

а)



б)

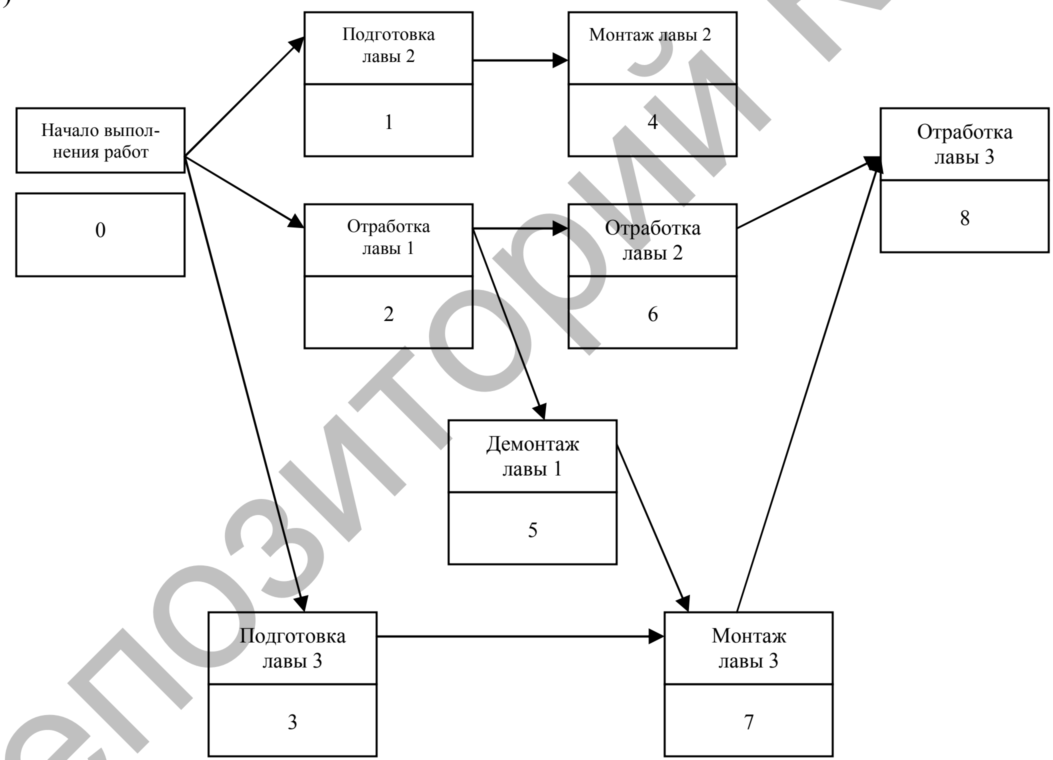


Рисунок 12. Сетевой график работы добычного участка на шахте:
а — представление на языке событий; *б* — представление на языке работ

При представлении сетевого графика на языке событий всем вершинам графа присваиваются номера, соответствующие номерам (шифрам) событий. Исходному событию, указывающему начало выполнения комплекса работ, обычно присваивается нулевой номер и завершающему (конечному), отражающему достижение намеченной цели данного комплекса работ, последний номер n.

Часто над дугой (i, j), отображающей определенную работу (здесь i — номер предшествующего события; j — последующего события), записываются ее наименование и параметры. Дуги, соответствующие фиктивным работам, обозначаются пунктиром. Сетевой график, представленный на рисунке 12, содержит семь событий и девять работ, из которых восемь действительных и одна фиктивная. Фиктивная работа (2, 4) отражает тот факт, что работа (4, 5) может быть начата только после того, как данный участок закончит отработку лавы [работа (0,2)].

Порядок построения сетевых графиков определяется принятой технологией и организацией работ. Сетевые графики отражают существующую или проектируемую очередность и взаимосвязь выполнения работ, что и представляет комплекс работ. Чтобы построить сетевой график некоторого комплекса работ, необходимо соблюдать определенные правила:

– никакая работа не может быть начата, пока все предшествующие ей работы не закончены;
– в сетевых графиках (представленных на языке событий) в каждое событие должно входить и выходить не менее одной работы;
– в сетевом графике не должно быть контуров;
– для построения параллельных одновременно выполняемых работ в сетевых графиках (представленных на языке событий) следует вводить дополнительное событие и фиктивную работу.

Эта фиктивная работа связывает дополнительное событие (являющееся последующим событием одной из параллельных работ) с последующим событием другой;

– для изображения двух работ, начало одной из которых зависит от выполнения предшествующих работ, а начало другой — только от выполнения одной из этих работ, необходимо в сетевом графике (представленном на языке событий) расчленить данные работы путем введения дополнительного события и указать их точную зависимость от предшествующих работ посредством фиктивной работы;
– в случае сложной работы, когда выполнение какой-то ее части позволяет начать одну или несколько других работ, следует данную работу разделить на последовательно выполняемые работы, от которых берут начало другие работы.

После построения сетевого графика необходимо произвести нумерацию его вершин, т.е. присвоить каждому событию (работе) определенный номер. Для удобства расчетов сетевого графика желательно, чтобы при нумерации событий (для графиков, представленных на языке событий) или работ (графиков — на языке работ) соблюдалось следующее условие: номер любого последующего события (последующей работы) должен быть больше номера предшествующего события (предшествующей работы).

Степень детализации сетевых графиков зависит от периода планирования и уровня управления комплексом работ. Для длительного периода времени построение сетевых графиков с большой детализацией работ сопряжено со значительными трудностями, помимо этого, чем выше уровень управления, тем менее целесообразно строить сетевые графики, в которых бы указывались незначительные по объему и времени работы.

Процесс расчленения одной укрупненной работы на ряд отдельных ее составляющих называется детализацией работы.

Сетевые методы управления предполагают, что в построении сетевых графиков принимают участие непосредственные исполнители работ. Каждый ответственный исполнитель представляет схему организации выполнения работ в виде первичных сетевых графиков, которые объединяются затем в общешахтный график.

Процесс соединения отдельных первичных сетевых графиков в общий называется сшиванием сетевых графиков. При сшивании сетевых графиков особое внимание обращается на то, чтобы граничные события первичных сетевых графиков имели одинаковые определения. Граничными событиями являются те события, по которым сшиваются первичные сетевые графики.

После построения сетевого графика и определения продолжительности каждой входящей в него работы можно приступить к расчету и анализу сетевого графика.

Методические положения по расчету временных параметров сетевых графиков

Целью анализа сетевого графика является определение основных временных параметров сетевой модели (для графика, записанного на языке событий):

а) критического и подкритического путей;
б) ранних и поздних сроков наступления событий;
в) ранних и поздних сроков начала и окончания работ;
г) резервов времени.

В соответствии с определением пути в ориентированной графе, любая последовательность работ в сетевом графике, в которой последующее событие каждой работы служит одновременно предшествующим событием следующей работы, называется путем сетевого графика. Путь, соединяющий два события сетевого графика, называется путем сетевого графика между данными событиями.

Путь, начало которого совпадает с начальным событием сети, а конец — с конечным событием сети, называется полным путем сетевого графика.

Если известна продолжительность каждой работы $\tau(i, j)$ сетевого графика, то длина любого пути равна сумме продолжительностей составляющих его работ, т.е.

$$T(L) = \tau(i_1,\ i_2) + \tau(i_2,\ i_3) + \ldots + \tau(i_{n-1},\ i_n),$$

где путь L проходит по работам $(i_1,\ i_2), (i_2,\ i_3), \ldots, (i_{n-1},\ i_n)$. Если i_1 — начальное событие; i_n — конечное событие, то $T(L)$ — полный путь сетевого графика.

Полный путь сетевого графика, имеющий наибольшую продолжительность, называется критическим путем. Длина критического пути представляет собой время, необходимое для выполнения последовательности работ, лежащих на критическом пути, и обозначается индексом $T_{кр}$.

Задача нахождения критического пути является одной из главных задач анализа сетевого графика, так как длина критического пути определяет продолжительность выполнения всего комплекса работ. Чтобы сократить время выполнения заданного комплекса работ, необходимо прежде всего принять меры по сокращению продолжительности работ, лежащих на критическом пути.

Если существует директивный срок выполнения определенного комплекса работ (например, монтаж лавы, подготовка выемочного столба), то продолжительность критического пути соответствующего сетевого графика не должна его превышать, т.е.

$$T_{кр} \le t_{дир}.$$

Подкритические пути — это пути сетевого графика, продолжительность которых незначительно отличается от длины критического пути. Ввиду того, что продолжительность этих путей мало отличается от длины критического пути, некоторая задержка выполнения работ, лежащих на подкритическом пути, может превратить подкритический путь в новый критический путь сетевого графика, что крайне нежелательно. Поэтому при выполнении работ сетевого графика следует обращать особое внимание как на работы, лежащие на критическом пути, так и на работы, лежащие на подкритическом пути.

Зная продолжительность каждой работы сетевого графика, можно определить для любого события сети наиболее ранний и наиболее поздний сроки его свершения.

Наиболее ранний срок наступления события — это наибольшая оценка длины пути от начального события сетевого графика до данного события.

Наиболее ранний срок наступления i - го события $t_p(i)$ определяется по формуле:

$$t_p(i) = \max\left[t_p(j) + i(j,i)\right],$$

где $t_p(i)$ — наиболее ранний срок наступления i-го события; $t_p(j)$ — наиболее ранний срок наступления предшествующих событий, входящих в i-е событие работ; $\tau(i, j)$ — продолжительность входящих в i-е событие работ.

Из всех значений $t_p(i)$ принимается максимальное. Для всех событий сетевого графика наиболее ранние сроки их наступления определяются в прямом порядке от начального события 0 до конечного события n:

– для начального события 0: $t_p(0) = 0;$

– для события 1: $t_p(1) = \left[t_p(0) + \tau(0,1)\right]\ldots;$

– для конечного события: $t_p(n) = t_{кр}.$

Наиболее поздний срок наступления события — это самый поздний срок свершения события, который не повлияет на продолжительность критического пути сетевого графика.

Наиболее поздний срок свершения i-го события $t_n(i)$ определяется по формуле:

$$t_n(\mathrm{i}) = \min\left[t_n(\mathrm{j}) - \tau(i, j)\right],$$

где $t_n(i)$ — наиболее поздний срок наступления i-го события; $t_n(j)$ — наиболее поздний срок наступления последующих событий, выходящих из i-го события работ; $\tau(i,j)$ — продолжительность выходящих из i-го события работ.

Из всех значений $t_n(i)$ принимается минимальное. Наиболее поздние сроки наступления событий сетевого графика определяются в обратном порядке с конечного события n до начального события 0:

– для конечного события $n: t_n(n) = T_{кр}$;

– для события n-1: $t_n(n-1) = \left[T_{кр} - \tau(n-1,\ n)\right]...$;

– для начального события 0: $t_n(0) = 0$.

Из изложенного выше следует важное заключение, что для событий (k), лежащих на критическом пути сетевого графика:

$$t_p(k) = t_n(k).$$

Рассмотрим расчет $t_p(i)$ и $t_n(i)$ на примере сетевого графика, изображенного на рисунке 12, а. Исходные данные для расчета приведены в таблице.

Т а б л и ц а

Исходные данные для расчета параметров сетевого графика

Номер предыдущего события (i)	0	0	0	1	2	2	3	4	5
Номер последующего события (j)	1	2	3	4	3	4	5	5	6
Продолжительность выполнения работы (i,j), дни	20	70	130	30	50	0	30	180	50

Производим расчет $t_p(i)$:

$t_p(0) = 0;$

$t_p(1) = t_p(0) + \tau(0,1) = 0 + 20 = 20;$

$t_p(2) = t_p(0) + \tau(0,2) = 0 + 70 = 70;$

$$t_p(3) = \max\begin{Bmatrix} t_p(0) + \tau(0,3) = 0 + 130 = 130 \\ t_p(2) + \tau(2,3) = 70 + 50 = 120 \end{Bmatrix} = 130;$$

$$t_p(4) = \max\begin{Bmatrix} t_p(1) + \tau(1,4) = 20 + 30 = 50 \\ t_p(2) + \tau(2,4) = 70 + 0 = 70 \end{Bmatrix} = 70;$$

$$t_p(5) = \max\begin{Bmatrix} t_p(4) + \tau(4,5) = 70 + 180 = 250 \\ t_p(3) + \tau(3,5) = 130 + 30 = 160 \end{Bmatrix} = 250;$$

$t_p(6) = t_p(5) + \tau(5,6) = 250 + 50 = 300.$

Производим расчет $t_n(i)$:

$t_n(6) = t_p(6) = 300;$

$t_n(5) = t_n(6) - \tau(5,6) = 300\text{-}50 = 250;$

$t_n(4) = t_n(5) - \tau(4,5) = 250 - 180 = 70;$

$t_n(3) = t_n(5) - \tau(3,5) = 250 - 30 = 220;$

$$t_n(2)=\min\begin{Bmatrix} t_n(4)-\tau(2,4)=70-0=70 \\ t_n(3)-\tau(2,3)=220-50=170 \end{Bmatrix}=70;$$

$$t_n(1)=t_n(4)-\tau(1,4)=70\text{-}30=40;$$

$$t_n(0)=\min\begin{Bmatrix} t_n(1)-\tau(0,1)=40-20=20 \\ t_n(2)-\tau(0,2)=70-70=0 \\ t_n(3)-\tau(0,3)=220-130=90 \end{Bmatrix}=0.$$

Из полученных значений $t_p(i)$ и $t_n(i)$ видно, что:

$t_p(0)=t_n(0)$; $t_p(2)=t_n(2)$; $t_p(4)=t_n(4)$;

$t_p(5)=t_n(5)$; $t_p(6)=t_n(6)$.

Отсюда следует, что события 0; 2; 4; 5; 6 лежат на критическом пути, т. е. критический путь проходит по работам (0,2), (2,4), (4,5), (5,6), и его длина равна

$$t_{кр}=t_p(6)=t_n(6)=300.$$

Зная наиболее ранний и поздний сроки наступления всех событий сетевого графика, можно для любой работы определить наиболее ранние и наиболее поздние сроки начала и окончания работ.

Наиболее ранний срок начала работы $t_{р.н}(i,j)$ равен наиболее раннему сроку наступления i-го события, т.е.

$$t_{р.н}(i,j)=t_p(i).$$

Наиболее поздний срок начала работы $t_{п.н}(i,j)$ равен разности между наиболее поздним сроком наступления j-го события и продолжительности работы $\tau(i,j)$, т.е.

$$t_{п.н}(i,j)=t_n(j)-\tau(i,j).$$

Наиболее ранний срок окончания работы $t_{р.о}(i,j)$ равен сумме наиболее раннего срока наступления i-го события и продолжительности работы $\tau(i,j)$, т.е.

$$t_{р.о}(i,j)=t_p(i)+\tau(i,j).$$

Наиболее поздний срок окончания работы $t_{п.о}(i,j)$ равен наиболее позднему сроку наступления j-го события $t_n(j)$

$$t_{п.о}(i,j)=t_n(j).$$

Для всех работ критического пути значения наиболее ранних и поздних сроков начала работ и наиболее ранних и поздних сроков окончания работ равны между собой, т.е.

$$t_{р.н}(k,l)=t_{п.н}(k,l);$$

$$t_{р.о}(k,l)=t_{п.о}(k,l),$$

так как наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, лежащих на критических путях, равны между собой, а эти события являются начальными и конечными событиями работ критического пути.

Важными параметрами сетевого графика являются резервы времени для событий, работ и путей сетевого графика.

Резерв времени события определяется но формуле:

$$P(i)=t_n(i)\text{-}t_p(i),$$

где $P(i)$ — резерв времени события; $t_p(i)$ — наиболее ранний срок наступления i-го события; $t_n(i)$ — наиболее поздний срок наступления i-го события.

Резерв времени события i сетевого графика показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление данного события, не вызывая при этом увеличения общей продолжительности работ сетевого графика. Очевидно, для событий k, лежащих на критическом пути,

$$P(k)=0,$$

так как $t_p(k)=t_n(k)$.

В соответствии с определением критического пути всякий некритический путь L имеет длину $T(L)$ меньше $T_{кр}$, т.е.

$$T(L) \langle T_{кр}.$$

Разница между длиной критического пути $T_{кр}$ и длиной некритического пути $T(L)$ называется полным резервом времени данного пути L и обозначается $P(L)$:

$$P(L)=T_{кр}-T(L).$$

Полный резерв времени пути L показывает, насколько можно увеличивать продолжительность всех работ, лежащих на этом пути, без существенного влияния на общий срок выполнения сетевого графика. Для критического пути резерв времени:

$$P(L_{кр})=0.$$

Любая работа (i,j), лежащая на некритическом пути, может обладать резервом времени, который называется полным резервом времени работы (i,j):

$$P(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-\tau(i,j),$$

где $P(i,j)$ — полный резерв времени работы (i,j); $t_p(i)$ — наиболее ранний срок наступления предшествующего события работы (i,j); $t_n(j)$ — наиболее поздний срок наступления последующего события работы (i,j); $\tau(i,j)$ — продолжительность работы (i,j).

Полный резерв времени работы показывает, насколько можно увеличивать продолжительность работы, не влияя на срок выполнения сетевого графика. Но при этом следует учесть, что увеличение продолжительности работ в пределах их резервов времени на любом пути сетевого графика не должно превышать полного резерва времени пути, на котором они лежат, так как при несоблюдении этого условия этот путь станет критическим. Очевидно, для работ (k,l), лежащих на критическом пути, резерв времени отсутствует, т.е.

$$P(k,l)=0.$$

Рассмотрим расчет $P(i)$, $P(L)$ и $P(i,j)$ на примере сетевого графика, изображенного на рисунке 12, а, с исходными данными таблицы.

Производим расчет $P(i)$:

$P(0)=t_n(0)-t_p(0)=0-0=0;$

$P(1)=t_n(1)-t_p(1)=40-20=20;$

$P(2)=t_n(2)-t_p(2)=70-70=0;$

$P(3)=t_n(3)-t_p(3)=220-130=90;$

$P(4)=t_n(4)-t_p(4)=70-70=0;$

$P(5)=t_n(5)-t_p(5)=250-250=0;$

$P(6)=t_n(6)-t_p(6)=300-300=0.$

Производим расчет $P(L)$:

$P(L_1)=T_{кр}-T(L_1)=300-280=20;$

$P(L_2)=T_{кр}-T(L_2)=300-300=0;$

$P(L_3)=T_{кр}-T(L_3)=300-200=100;$;

$P(L_4)=T_{кр}-T(L_4)=300-210=90,$

где L_1 — путь, проходящий по работам (0,1), (1,4), (4,5), (5,6); L_2 — (0,2), (2,4), (4,5), (5,6); L_3 — (0,2), (2,3), (3,5), (5,6); L_4 — (0,3), (3,5), (5,6).

Рассчитаем теперь $P(i,j)$

$P(0,1)=t_n(1)-t_p(0)-\tau(0,1)=40-0-20=20;$

$P(0,2)=t_n(2)-t_p(0)-\tau(0,2)=70-0-70=0;$

$P(0,3)=t_n(3)-t_p(0)-\tau(0,3)=220-0-130=90;$

$P(1,4)=t_n(4)-t_p(1)-\tau(1,4)=70-20-30=20;$

$P(2,4)=t_n(4)-t_p(2)-\tau(2,4)=70-70-0=0;$

$P(2,3)=t_n(3)-t_p(2)-\tau(2,3)=220-70-50=100;$

$P(3,5)=t_n(5)-t_p(3)-\tau(3,5)=250-130-30=90;$

$P(4,5)=t_n(5)-t_p(4)-\tau(4,5)=250-70-180=0;$

$P(5,6)=t_n(6)-t_p(5)-\tau(5,6)=300-250-50=0.$

По результатам расчетов видно, что все резервы времени событий и работ, лежащих на критическом пути, равны нулю. Остальные события, работы и пути сетевого графика имеют резервы.

Работа (0,1) имеет резерв времени, равный 20 дням, поэтому увеличение ее продолжительности с 20 до 40 дней не повлияет на продолжительность осуществления комплекса этих работ. Работа (1,4) также имеет резерв времени 20 дней. Если мы одновременно с увеличением продолжительности работы (0,1) на 20 дней увеличим продолжительность работы (1,4), хотя бы на 10 дней, то это приведет к увеличению продолжительности осуществления комплекса работ на 10. Это объясняется тем, что путь L, на котором лежат работы (0,1) и (1,4), имеет резерв 20 дней, и такое увеличение приведет к тому, что он станет критическим с продолжительностью 310 дней.

Таким образом, если увеличение продолжительности выполнения комплекса работ нежелательно, то изменения длительностей работ должны происходить в пределах резервов как работ, так и пути, на котором они лежат.

Список литературы

1 *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 326 с.

2 *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети / Пер. с англ. — М.: Наука, 1973. — 368 с.

3 *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 520 с.

4 *Оре О.* Теория графов / Пер. с англ. — М.: Наука, 1968. — 352 с.

5 *Мигачев Р.Д., Лобовский А.Е.* Экономико-математические методы в планировании угольного производства: Учеб. пособие. — М.: Недра, 1979. — 181 с.

6 *Цой С., Цхай С.М.* Прикладная теория графов. — Алма-Ата: Наука, 1971. — С. 13.

7 *Березина Л.Ю.* Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979. — С. 28.

8 *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — С. 228, 229.

9 *Харари Ф.* Теория графов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 302 с.

10 *Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е.* Теория графов: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1976. — С. 17.

11 *Гревцев Н.В., Шампаров А.Г.* Системные принципы выбора технологии добычи и переработки торфяного и техногенного сырья // Изв. вузов; Горный журнал. — 2009. — № 8.

12 *Кузнецов К.К., Рапопорт П.И.* Сетевые методы планирования и управления в угольной промышленности. — М.: Недра, 1975. — С. 6.

13 *Разумов И.М., Белова Л.Д., Ипатов М.И., Проскуряков А.В.* Сетевые графики в планировании: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1981. — С. 16.

Р.С.Каренов

Графтар және желілік модельдеу ілімдерінің көмегімен көпнұсқалы желілік құрылымдары бар нысандар мен үдерістерді зерттеу

Графтар ілімінің ілімдік және тәжірибелік мәселелері баяндалған. Графтар ілімінің негізгі ұғымдары және мәселелері қарастырылған. Экономика және басқару саласындағы әр түрлі есептерді шешуде графтар ілімін қолдану мүмкіндіктері ашылған. Торфтық композициялық материалдар өндірісін арнайы дайындалған топологиялық үлгілер негізінде жүйелі талдау ұсынылған. Кен өнеркәсібіне қатысты алғандағы желілік жоспарлау және басқару жүйелері туралы жалпы мағлұматтар, желілік графиктер құру ережелері келтірілген. Практикалық маңызы түсіндіріле отырып, толық, жекелеген және еркін уақыт резервтерінің әрқайсысына оның шамалары берілген. Формулалар талданып, нақты мысалда уақыт резервтерінің барлық түрлерін есептеу тәсілдері көрсетілген.

R.S.Karenov

Research of objects and processes with multivariate network structures using graph theory and network modeling

It is raised theoretical and applied questions of the graph theory. The basic concepts and problems of graph theory are considered. It is revealed the possibilities of using graph theory to solve various problems in the field of economics and management. It is offered system production analysis of peat composite materials on the basis of developed topological model. General concepts about systems of network planning and management in relation to mining industry are stated. Creation rules of network graphs are provided. Definitions of complete, partial and free time reserves with explanations of their practical value are given. It is analyzed formulas and on a specific example showed the method of calculating all types of time reserves.

References

1 Harary F., Palmer E. *Graphical enumeration* / Trans. from English. — Moscow: Mir, 1977, 326 p.

2 Busacker R., Saaty T. *Finite graphs and networks* / Trans. from English. — Moscow: Nauka, 1976, 368 p.

3 Hu T. *Integer programming and network flows* / Trans. from English. — Moscow: Mir, 1974, 520 p.

4 Ore O. *Graph theory* / Trans. from English. — Moscow: Nauka, 1968, 352 p.

5 Migachev R.D., Lobovsky A.E. *Economic and mathematical methods in the planning of coal production: the manual book*. — Moscow: Nedra, 1979, 181 p.

6 Tsoy S., Tskhai S. *Applied graph theory*. — Alma-Ata: Nauka, 1971, p. 13.

7 Berezina L.Yu. *Graphs and their uses*. — Moscow: Prosveshenie, 1979, p. 28.

8 Kristofides N. *Teoriya grafov: Graph theory: Algorithmic approach* / Trans. from English. — Moscow: Mir, 1978, p. 228, 229.

9 Harary F. *Graph theory* / Trans. from English. — Moscow: Mir, 1973, 302 p.

10 Belov V.V., Vorobiyev E.M., Shatalov V.E. *Graph theory: the manual book*. — Moscow: High School, 1976, p. 17.

11 Grevtsev N.V., Shamparov A.G. *System selection principles of production technology and conversion of peat and technogenic raw materials* // News of higher education institutions; Mining Journal, 2009, № 8.

12 Kuznetsov K.K., Rapoport P.I. *Network planning and management methods in the coal industry*. — Moscow: Nedra, 1975, p. 6.

13 Razumov I.M., Belova L.D., Ipatov M.I., Proskuryakov A.V. *Network graphs in planning: the manual book*. — Moscow: High School, 1981, p. 16.