$\{0\}\times\bar{Q}$ или на его боковой поверхности $[0,T]\times\partial\Omega$ и, по крайней мере, одна из функций U_α достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, т.е.

$$U_\alpha(t,x)\le\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x);\ \sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\};\quad (t,x)\in\bar{Q}; \tag{16 a}$$

$$\Big(U_\alpha(t,x)\ge\min\{\inf_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x);\ \inf_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\};\quad (t,x)\in\bar{Q}\Big);\quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{16 b}$$

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 2, так как лемму 2 доказали, исходя из выполнения необходимого и достаточного условий локального максимума функции E, а потому верно и обратное. Откуда имеем (16а, в). Отсюда, следуя [7; 513], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие 2. Если векторы функций f,Φ удовлетворяют условиям **i**) и **ii**), то для решений $U(t,x)$ задачи (1) справедлива оценка

$$\|U\|_{C(\bar{Q})}\le\|\Phi\|_{C(\bar{\Omega})}+T\|f\|_{C(\bar{Q})}\equiv A_1,\forall T<\infty,\ \text{где}\ \|U\|_{C(\bar{Q})}=\max_{1\le\alpha\le3}\sup_{\bar{Q}}|U_\alpha(t,x)|.$$

References

1. *Ladyzenskaja O.A.* Mathematical problems of dynamics viscous incompressible fluids. — M.: Science, 1970. — 288 p.
2. *Akysh A.Sh.* New the properties of Navier-Stokes equations // Vestnik of KarSU. — 2010. — № 4 (60). — P. 16–24.
3. *Akysh A.Sh.* About problem of theory of Navier-Stokes equations // Works of 6th conference of Russian-Kazakh working group of computing and informational technologies (16–18 Marth 2009). — Almaty: Kasakh University, 2009. — P. 54–61.
4. *Akysh A.Sh.* About lemm of mathematical theory of the Navier-Stokes equations // Materials III of International scientific conference «Actual problems of mechanics and buildingmashine». — Vol. 3. — Almaty, 2009. — P. 209–213.
5. *Kochin N.E.* Vector Calculus and the beginning of the tensor calculus. — M.: Science, 1965. — 426 p.
6. *Ilyin V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.H.* Mathematical analysis. — M.: Science, 1979. — 719 p.
7. *Vladimirov V.S.* The equations of mathematical physics. — M.: Science, 1981. — 612 p.

УДК 517.9

Критерии абсолютной неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка

Absolute nonoscillation criterion of half-linear second order difference equation

Алимагамбетова А.З.

Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, Астана (E-mail: ainash_777@mail.ru)

Кейбір шарттарды қанағаттандыратын оң коэффициенттері бар жартылай сызықты екінші ретті айырымдық теңдеу үшін тербелімсіздік шарт негізінде теңдеудің абсолютті тербелімсіздік критерийі орнатылды. Ол нэтижелер екінші ретті сызықты айырымдық теңдеулер үшін де жаңа болып табылады.

Criterions of absolute nonoscillation based on the conditions of Nonoscillation are established for a semilinear difference equation of second order with positive coefficients, which satisfy certain conditions. The results of the theorem about the absolute nonoscillation are new results for linear difference equation of the second order.

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k)+\lambda b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1}=0,\qquad k=0,1,..., \tag{1}$$

где $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k, 1<p<\infty$. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что $a=\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $b=\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательности действительных чисел.

Уравнение (1) при $p=2$ имеет вид

$$\Delta(a_k \Delta x_k)+\lambda b_{k+1}x_{k+1}=0, \qquad k=0,1,.... \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) соответственно являются дискретными аналогами полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)\left|x'(t)\right|^{p-2}x'(t))'+\lambda b(t)\left|x(t)\right|^{p-2}x(t)=0 \tag{3}$$

и уравнения Штурма-Лиувилля

$$(a(t)x'(t))'+\lambda b(t)x(t)=0. \tag{4}$$

Изучение качественной теории линейного уравнения (4), в частности, вопросы осцилляторности и неосцилляторности его решения, начатое в фундаментальной работе Штурма в 1836 г., получило продолжение в настоящее время [1].

Рассмотрим основные понятия и определения, связанные с уравнением (1).

Определение. Последовательность действительных чисел $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $k=0,1,...$.

Пусть N — множество натуральных чисел и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Определение. Говорят, что интервал $(m,m+1], m\in N,$ содержит обобщенный нуль решения $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m\neq 0$ и $a_m x_m x_{m+1}\leq 0$.

Определение. Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечно много обобщенных нулей на дискретном интервале $[n,\infty), n\in N,$ в противном случае решение уравнения (1) называется неосцилляторным.

Определение. Если уравнение (1) является осцилляторным (неосцилляторным) при всех $\lambda>0,$ то уравнение (1) называется осцилляторным (неосцилляторным).

При $\lambda=1$ уравнение (1) имеет вид

$$\Delta(a_k\left|\Delta x_k\right|^{p-2}\Delta x_k)+b_{k+1}\left|x_{k+1}\right|^{p-2}x_{k+1}=0, \qquad k=0,1,... \tag{5}$$

Предположим, что коэффициенты a_k уравнения (5) удовлетворяют условию $a_k>0, k=0,1,...,$ тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{1-p'}=\infty. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения для уравнения (5):

$$B_1(m)\equiv B_1(m,a,b)=\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=m}^{n}a_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}b_{k+1}\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$B_2(m)\equiv B_2(m,a,b)=\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=m}^{n}a_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=m}^{n}b_{k+1}\left(\sum_{i=m}^{k}a_i^{1-p'}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$B_3(m)\equiv B_3(m,a,b)=\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=n}^{\infty}b_{k+1}\right)^{-\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k^{1-p'}\left(\sum_{i=k}^{\infty}b_{i+1}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}};$$

$$B_i\equiv B_i(a,b)=B_i(0), \quad i=1,2,3,$$

$$k_1(p)=\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad k_2(p)=\frac{1}{p'}, \quad k_3(p)=\frac{1}{p},$$

$$K_1(p)=1, \quad K_2(p)=(p)^{\frac{1}{p}}, \quad K_3(p)=(p')^{\frac{1}{p'}}.$$

Наряду с уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$\Delta\left(b_{k+1}^{1-p'}\left|\Delta x_k\right|^{p'-2}\Delta x_k\right)+a_{k+1}^{1-p'}\left|x_{k+1}\right|^{p'-2}x_{k+1}=0, k\geq 0, \tag{5′}$$

где $b_{k+1} > 0, a_{k+1} > 0$ при всех $k \ge 0$ и $1 < p' < \infty$. Для уравнения (5′) выражения $B_i(m), i = 1,2,3,$ соответственно будут

$$B_1^{'}(m) = \sup_{n \ge m}\left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}};$$

$$B_2^{'}(m) = \sup_{n \ge m}\left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)^{-\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=m}^{n} a_k^{1-p'}\left(\sum_{i=m}^{k} b_i\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}};$$

$$B_3^{'}(m) = \sup_{n \ge m}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i^{1-p'}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}};$$

а $K_i(p), k_i(p), i = 1,2,3,$ соответственно имеют вид:

$$k_1^{'}(p') = \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}};\;\; k_2^{'}(p') = \frac{1}{p};\;\; k_3^{'}(p') = \frac{1}{p'};$$

$$K_1^{'}(p') = 1;\;\; K_2^{'}(p') = (p')^{\frac{1}{p'}};\;\; K_3^{'}(p') = (p)^{\frac{1}{p}}.$$

Условие (6) переходит к условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty. \tag{7}$$

Теорема 1 [2]. Пусть $1 < p < \infty, a_k > 0, b_k > 0$ при всех $k \ge 1$. Если выполнено условие (6), то выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i(m) \le K_i(p)$ при всех $i = 1,2,3$ необходимо, а выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i(m) < k_i(p)$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1,2,3$ достаточно для неосцилляторности уравнений (5) и (5′). Если выполнено условие (7), то выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i^{'}(m) \le K_i^{'}(p')$ при всех $i = 1,2,3$ необходимо, а выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i^{'}(m) < k_i^{'}(p')$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1,2,3$ достаточно для неосцилляторности уравнений (5) и (5′).

Для уравнения (1) выражения $B_i(m)$ и $B_i^{'}(m)$ имеют соответственно вид $\lambda B_i(m), \lambda B_i^{'}(m)$, где $B_i(m)$, $B_i^{'}(m)$ выше определены для уравнения (5) и (5′) при $\lambda = 1$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty; a_k > 0; b_k > 0,\;\; k = 0,1,...$. Если выполнено условие (6), то выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i(m) = 0$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1,2,3$ является необходимым и достаточным условием для абсолютной неосцилляторности уравнения (1). Если выполнено условие (7), то выполнение условий $\lim_{m\to\infty} B_i^{'}(m) = 0$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1,2,3$ является необходимым и достаточным условием для абсолютной неосцилляторности уравнения (1).

References

1. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. — M.: World, 1970. — 720 p.
2. *Alimagambetova A.Z., Oinarov R.* Oscillation and nonoscillation criterions of half-linear difference equation // Mathematical journal. — 2007. — Vol. 7 — № 1. — P. 15–24.