

# КОНДЕНСАЦИЯ ЛАНҒАН КҮЙДІҢ ФИЗИКАСЫ ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 530.21

## Схема Бернулли и одномерное уравнение Дирака Bernoulli scheme and one-dimensional Dirac equation

Архипов В.В., Колт М.В., Кудусов А.С.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: midav\_73@mail.ru)

Мақалада біртекті Дирак теңдеуінің классикалық телеграф теңдеуіне қатысы қарастырылған. Бернуллидің классикалық сұлбасын жалпылау кванттық эффектінің есепке алу идеясына әкелетіндігі зерттелген. Кванттық қасиеттер Фейнман шахмат тақтасындағы нүктенің кері қозғалыс уақытының мүмкіндіктерін енгізгенде есепке алынуы мүмкін. Бұл болжамды тексеру үшін ықтималдылық теңдеулер жүйесін құру керек, өз кезегінде ол эквиваленттік классикалық телеграф теңдеуіне әкелетіндігі көрсетілген.

The correlation between one-dimensional Dirac equation and classical telegraph equation is researched in this work. There is investigated the idea that the Bernoulli scheme generalization can cover quantum effects. More exactly, a purpose of the work is an investigation of the assumption that quantum properties can be taken account by the possibility of the time-reversed particle moving on the Feynman chessboard. For checking of this hypothesis a system of probabilistic equations is reduced. It is shown that the indicated assumption leads to equations which are equivalent to the classical telegraph equation.

### 1 Введение

В настоящей работе мы рассмотрим соотношение одномерного уравнения Дирака с классическим телеграфным уравнением, получаемым с использованием схемы Бернулли [1]. Это сопоставление впервые предложено Р.Фейнманом [2] для наглядного пояснения понятия спина и иллюстрации его метода функционального интеграла по траекториям. Позднее эта модель получила название шахматной доски Фейнмана, и она не раз использовалась для различного рода обобщений. В частности, в работе [3] предложен оригинальный метод её обобщения для вероятностной трактовки волновых функций Дирака.

#### 1.1 Одномерное уравнение Дирака

В одномерном случае уравнение Дирака для свободной частицы с полуцелым спином может быть записано в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left( -i\hbar c \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_0 c^2 \sigma_0 \right) \Psi, \quad (1)$$

где  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  — двухкомпонентная функция, учитывающая два возможных состояния — «частица» и «античастица». Речь о собственно проекции спина не идет ввиду отсутствия самого понятия момента импульса в одномерном случае. Плотность вероятности определяется стандартным образом как  $\Psi^+ \Psi$ :

$$P(x, t) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2.$$

Используемые в (1) матрицы  $\sigma_{0,1}$  должны отвечать требованиям

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_0 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_0 = 0, \quad (2)$$

т.е. можно взять какие-либо матрицы Паули, например:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В явном виде система уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \Psi_2 - \frac{im_0c}{\hbar} \Psi_1, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 &= -\frac{\partial}{\partial x} \Psi_1 + \frac{im_0c}{\hbar} \Psi_2. \end{aligned}$$

### 1.2 Телеграфное уравнение и схема Бернулли

Рассмотрим блуждание точки по шахматной доске Фейнмана (рис. 1). Предположим, что частица обладает направлением движения влево относительно оси  $Ox$  или вправо. Положительное направление вдоль оси  $Oy$  фиксированно. Делая шаг, точка смещается вверх на величину  $\varepsilon_y = \varepsilon/\sqrt{2}$ , где  $\varepsilon$  — размер ячейки. Если направление движения не меняется, то точка смещается также влево или вправо на величину  $\varepsilon_x$ , также равную  $\varepsilon/\sqrt{2}$ . Если направление меняется, то координата  $x$  остается прежней.

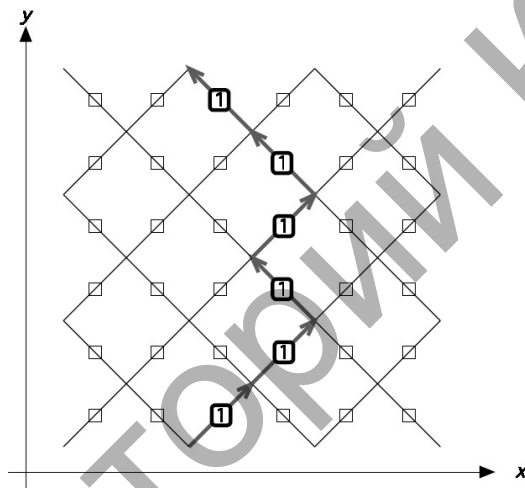


Рис. 1. С каждым шагом вдоль оси  $Oy$  точка смещается влево или вправо. Цифра 1 есть значение переменной Бернулли для данного состояния. Ее значение в остальных квадратах равно нулю (рис. взят из статьи [3])

Пусть  $t$  — число такое, что  $t\varepsilon$  есть вероятность для точки изменить свое направление. Для простоты будем предполагать, что этот параметр постоянен для всего пространства. Таким образом, исходя из элементарных законов сложения и умножения вероятностей, можно составить следующую пару уравнений:

$$\begin{aligned} u_+(x, y + \varepsilon_y) &= (1 - t\varepsilon)u_+(x - \varepsilon_x, y) + t\varepsilon u_-(x, y), \\ u_-(x - \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) &= (1 - t\varepsilon)u_-(x - \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) + t\varepsilon u_+(x - \varepsilon_x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Раскладывая функции  $u_{\pm}$  в ряд по  $\varepsilon$  с точностью до членов первого порядка, получим пару линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial y} + \frac{\partial u_+}{\partial x} &= -\sqrt{2}t\varepsilon u_+ + \sqrt{2}t\varepsilon u_-, \\ \frac{\partial u_-}{\partial y} - \frac{\partial u_-}{\partial x} &= -\sqrt{2}t\varepsilon u_- + \sqrt{2}t\varepsilon u_+. \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$u_+ = e^{-\sqrt{2}t\varepsilon y} U_+, \quad u_- = e^{-\sqrt{2}t\varepsilon y} U_-, \quad (4)$$



где знак «-» перед последним слагаемым первого уравнения как раз обусловлен обратным ходом частицы. После разложения в ряд по  $\varepsilon$  получим систему линейных дифференциальных уравнений, аналогичных (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_+}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \sqrt{2}m\varphi_+ - \sqrt{2}m\varphi_-, \\ \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} - \sqrt{2}m\varphi_- - \sqrt{2}m\varphi_+. \end{aligned} \tag{8}$$

Замена

$$\varphi_{\pm} = e^{-\sqrt{2}my} \psi_{\pm}$$

упрощает последнюю систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_+}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi_+}{\partial x} + \frac{m}{k} \psi_-, \\ \frac{\partial \psi_-}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_-}{\partial x} + \frac{m}{k} \psi_+. \end{aligned}$$

Вводя бивектор  $\Psi$ , получаем уравнение, аналогичное (6):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\sigma_z \frac{\partial \Psi}{\partial x} - i \frac{m}{k} \sigma_y \Psi,$$

которое отличается наличием мнимой единицы  $i$  в последнем слагаемом, что, как было отмечено чуть выше, решает проблему согласования схемы Бернулли с уравнением Дирака.

Однако, на наш взгляд, приведенное в статье [3] обоснование исходной системы уравнений (8) является недостаточным или плохо сформулированным. Для проверки выдвинутой идеи о том, что включение возможности обратного во времени движения точки может привести к полному соответствию уравнению Дирака, мы предлагаем альтернативный подход, основанный на непосредственном составлении соответствующих вероятностных уравнений.

### 2.2 Альтернативный подход

Введём вероятность изменения направления движения вдоль оси  $Oy$  как  $n\varepsilon$ , где  $n$  — положительное число, аналогичное  $m$  для оси  $Ox$ . Кроме того, введем дополнительно вероятности состояний, направленных против оси  $Oy$ . Будем обозначать их как  $\tilde{\varphi}$ .

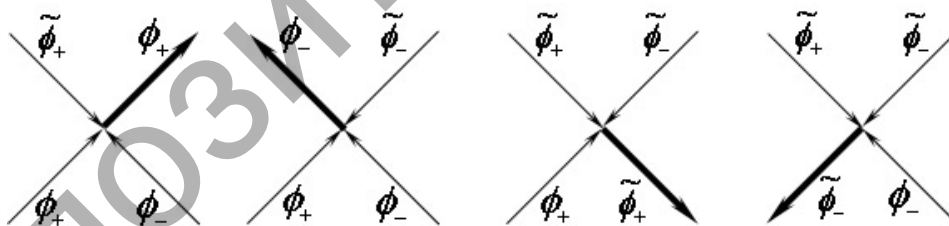


Рис. 3. Результирующие состояния, справа налево:  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\tilde{\phi}_+$ ,  $\tilde{\phi}_-$

На рисунке 3 показаны соотношения различных состояний. Конечные или результирующие состояния помечены жирными стрелками. В каждом случае левую нижнюю стрелку будем считать имеющей координаты  $(x, y)$ . Состояние  $\varphi_+$  может явиться результатом того, что (см. правую картинку рис. 3): частица находилась в состоянии  $\varphi_+$  и не изменила своего направления ни влево (вероятность этого  $(1 - m\varepsilon)$ ), ни вниз (вероятность этого  $(1 - n\varepsilon)$ ); частица находилась в состоянии  $\varphi_-$ , изменила свое направление вправо (вероятность этого  $m\varepsilon$ ), продолжила движение вверх (вероятность этого  $(1 - n\varepsilon)$ ); частица находилась в состоянии  $\tilde{\varphi}_+$  и не изменила своего направления вправо (вероятность этого  $(1 - m\varepsilon)$ ), но переключилась на движение вверх (вероятность этого  $n\varepsilon$ ).

Аналогичным образом можно рассмотреть и остальные результирующие состояния. Теперь можно составить систему вероятностных уравнений по аналогии с (3):

$$\varphi_+(x, y + \varepsilon_y) = \varphi_-(x, y)m\varepsilon(1 - n\varepsilon) + \varphi_+(x - \varepsilon_x, y)(1 - m\varepsilon)(1 - n\varepsilon) + \tilde{\varphi}_+(x - \varepsilon_x, y + \varepsilon_y)(1 - m\varepsilon)n\varepsilon,$$

$$\varphi_-(x - \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) = \tilde{\varphi}_-(x, y + \varepsilon_y)(1 - m\varepsilon)n\varepsilon + \varphi_-(x, y)(1 - m\varepsilon)(1 - n\varepsilon) + \varphi_+(x - \varepsilon_x, y)m\varepsilon(1 - n\varepsilon),$$

$$\tilde{\varphi}_+(x, y) = \tilde{\varphi}_-(x, y + \varepsilon_y)m\varepsilon(1 - n\varepsilon) + \varphi_+(x - \varepsilon_x, y)(1 - m\varepsilon)n\varepsilon + \tilde{\varphi}_+(x - \varepsilon_x, y + \varepsilon_y)(1 - m\varepsilon)(1 - n\varepsilon),$$

$$\tilde{\varphi}_-(x - \varepsilon_x, y) = \tilde{\varphi}_-(x, y + \varepsilon_y)(1 - m\varepsilon)(1 + n\varepsilon) + \varphi_-(x, y)(1 - m\varepsilon)n\varepsilon + \tilde{\varphi}_+(x - \varepsilon_x, y - \varepsilon_y)(1 - n\varepsilon)m\varepsilon.$$

Раскладывая их в ряд по  $\varepsilon$ , получим:

$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} + \sqrt{2}m\varphi_- - \sqrt{2}m\varphi_+ - \sqrt{2}n\varphi_+ + \sqrt{2}n\tilde{\varphi}_+,$$

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} + \sqrt{2}n\tilde{\varphi}_- - \sqrt{2}m\varphi_- - \sqrt{2}n\varphi_- + \sqrt{2}m\varphi_+,$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_+}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_+}{\partial x} - \sqrt{2}m\tilde{\varphi}_- - \sqrt{2}n\varphi_+ + \sqrt{2}m\tilde{\varphi}_+ + \sqrt{2}n\varphi_+,$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_-}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}_-}{\partial x} + \sqrt{2}n\tilde{\varphi}_+ + \sqrt{2}m\tilde{\varphi}_- - \sqrt{2}n\varphi_+ + \sqrt{2}n\tilde{\varphi}_+.$$

Сделаем замену, которая является обобщением замены (4):

$$\Phi = \exp\{\sqrt{2}n\alpha_3 x - \sqrt{2}m\beta y\}\Psi,$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \\ \tilde{\varphi}_+ \\ \tilde{\varphi}_- \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \\ \tilde{\psi}_+ \\ \tilde{\psi}_- \end{pmatrix}$$

— четырехкомпонентные функции и

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Дирака. Нетрудно показать, что такая замена приводит к упрощению исходной системы и разбиению ее на две независимые части — для «частиц» и «античастиц»:

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_+}{\partial x} + \sqrt{2}m\psi_- - \sqrt{2}n\psi_+,$$

$$\frac{\partial \psi_-}{\partial y} = \frac{\partial \psi_-}{\partial x} + \sqrt{2}m\psi_+ - \sqrt{2}n\psi_-,$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_+}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\psi}_+}{\partial x} - \sqrt{2}m\tilde{\psi}_- + \sqrt{2}n\tilde{\psi}_+,$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_-}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{\psi}_-}{\partial x} - \sqrt{2}m\tilde{\psi}_+ + \sqrt{2}n\tilde{\psi}_-.$$

Отметим, что каждая пара по отдельности эквивалентна системе уравнений (3).

Таким образом, включение возможности для частицы обратного во времени движения, в рамках рассмотренной здесь схемы Бернулли, приводит к уравнениям, эквивалентным телеграфному уравнению, полученному вначале. То есть выводы, сделанные в статье [3] относительно способа

обобщить уравнения классической статистики на квантовый случай, являются недостаточно обоснованными.

## References

1. *Kac M.* A stochastic model related to the telegrapher's equation // *Rocky Mountain Journal of Mathematics.* — Vol. 4. — 1974. — P. 497–509.
2. *Feynman R.P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // *Rev. Mod. Physics.* — 1948. — Vol. 20. — P. 367–387.
3. *Ord G.N.* Quantum mechanics in a two-dimensional spacetime: What is wavefunction? // *Annals of Physics.* — 2009. — Vol. 324. — P. 1211–1218.

УДК 66.066.66.048

## Математическое описание высокоинтенсивного процесса испарения с поверхности растворов солей металлов

### Mathematical description of high-intensity process of evaporation from the surface of salt metals solutions

Базанов А.В., Падохин В.А.

*Институт химии растворов РАН, Иваново, Россия (E-mail: bazanov@hotbox.ru)*

Мақалада буландырғыш құрылғы ішіндегі сұйық күйіндегі заттың әр түрлі жылу өткізгіш арналары арқылы булану үдерісі математика әдістері көмегімен талданған. Әр түрлі фазалардағы заттардың шекара беттері арқылы жылу тасымалдау құбылысының бу-газ ортасында ерітілген заттардың табиғаттарына, құрамдарына және қасиеттеріне тәуелділігі зерттелген. Турбуленттік құбылыстың жалпы қасиеттеріне сүйене отырып,  $N(\epsilon)$  функциясы шамасы жуықтап анықталған. Дисциллятта ерітілген заттың булану және жиналу жылдамдықтарын сипаттайтын теңдеу, сондай-ақ  $St$  және  $Nu$  шамаларын анықтайтын теңдеу құрастырылған.

In this research the questions of the mathematical description of evaporation in the evaporating plant liquids under the influence of the various factors heat addition are considered. The analysis of the complex interplay heat and mass transfer the processes at the interface in vapor-gas medium with the nature of the solute structure and the properties of the solvent-metal salt is conducted. On the basis of general ideas about the structure of turbulence as a system of turbulent eddies discussed the relation to the estimated dependence  $Nu(\epsilon)$ . Equations for the velocity of evaporation and accumulation of dissolved substances in the distillate and for a number of typical cases of the evaporation solutions in a limited amount of evaporation plant are installed. A closed system of criteria equations for  $St$  and  $Nu$  describing the relationship with the parameters  $\epsilon$  and evaporation is obtained.

В данном исследовании нами были рассмотрены вопросы испарения в выпарной установке жидких веществ под влиянием различных факторов теплоподвода и турбулизации паровой среды. Постановка указанной задачи актуальна в связи с проблемами выявления определяющих факторов, влияющих на качество дистиллята, получаемого при температурах испарения  $\leq 98$  °С.

Одной из характерных особенностей испарения растворов в выпарной установке является сложная взаимосвязь процессов тепломассопереноса на поверхности раздела фаз, в парогазовой среде с природой растворенного вещества, структурой и свойствами системы растворитель–соль металла. Турбулизация потока пара позволяет интенсифицировать испарение с поверхности выпариваемого раствора и унос парогазовой среды. При этом между процессами пароотвода и испарения возникает обратная связь, обуславливающая в ряде случаев возможность выбора оптимального режима работы выпарной установки.

Учесть влияние турбулентности в объеме выпарной установки значительно труднее, чем в открытой системе. Это связано с тем, что система пароотвода и внутренняя геометрия выпарной уста-