РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ЭКОНОМИКЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА

Абдрахман Н.М.
Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: nurrs.di@gmail.com

Введение. Математический аппарат интегро-дифференцирования дробного порядка описывает процессы в системах, где существенен учет нелокальных свойств по времени и пространству, для моделирования динамических систем, характеризующихся дальними корреляциями и постоянной памятью, долгосрочной памятью.Производные дробного порядка используются для описания экономических процессов с динамической памятью.

Микроэкономическая интерпретация производных напрямую связана с предельным анализом и понятием предельной (маржинальной) величины, использующий математический аппарат производных целого порядка.

Производная первого порядка от функции некоторого показателя по определяющему его фактору задает предельную (маржинальную) величину, соответствующую данному показателю. Предельная величина отражает прирост соответствующего показателя в расчете на единицу прироста определяющего его фактора. К базовым предельным величинам в микроэкономике относятся предельная производительность, предельная полезность, предельные затраты, предельная себестоимость, предельный доход, предельный спрос и некоторые другие

Необходимые определения и понятия. Мы знаем, что в дифференциальных уравнениях целого порядка экспоненциальная функция e^zиграет важную роль. Это также может быть записано в форме уравнения, которая выражается как:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}.$$

Это обобщение называется функцией Миттаг-Лефлера, а двухпараметрическая функция очень полезна в дробном исчислении, особенно в дробных дифференциальных уравнениях.

Поскольку ряд для функции Миттаг-Лефлера (1) равномерно сходится на всех компактных подмножествах C, мы можем дифференцировать его почленно, чтобы получить следующее выражение, которое также необходимо в дальнейшем

Следствие. Допустим $z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ и $m \in \mathrm{N}$, и $m \in \mathrm{N}$, тогда m-кратно дифференцированная функция Миттаг-Леффлера имеет вид:

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{z^k}{\Gamma(ak + am + \beta)}.$$

В следующей таблице показаны некоторые частные случаи выражения (37), а также преобразование Лапласа степенной функции.

$F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s^a}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{s^a - \alpha}$	$t^{a-1}E_{\alpha,\alpha}(\alpha t^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + \alpha)}$	$E_\alpha(-\alpha t^\alpha)$
$\frac{\alpha}{s(s^\alpha + \alpha)}$	$1 – E_\alpha(-\alpha t^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s - \alpha)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$

Buketov University

$\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\alpha}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\alpha t^{\alpha})$

Задача об ожидании роста цен в условиях инфляции. Современные исследования отражают факт влияния ожидания роста цен на товары и услуги основной группы населения на экономику, в условиях инфляции. Соответственно, если ожидание населения – это увеличение цен, проявляется тенденция к увеличению спроса на повседневные товары, в результате – цены растут. Если же ожидание населения заключается в экономическом росте, замедления темпов инфляции – увеличивается спрос на товаров длительного использования, начинается инвестирование в проекты, пополняются депозитные счета и как правило наступает рост экономики. Данное явление именуется инфляционным ожиданием и используется в макроэкономических исследованиях. Описание данного процесса предложил лауреат Нобелевской премии по экономике Милтан Фридман, в виде дифференциального уравнения.

$\frac{dE}{dt} = -\beta\big(E - R(t)\big).$

где E=E(t) – ожидаемый населением темп роста цен в момент времени t,

R(t) – фактический темп рост цен в момент времени t,

$\beta > 0$ - коэффициент адаптации населения к изменениям темпа инфляции.

Смысл уравнения инфляционных ожиданий заключается в том, что скорость $\frac{dE}{dt}$ изменения ожидаемого темпа роста цен во времени прямо пропорцианаьна ошибке инфляционного ожидании, т.е. разности $\big(E - R(t)\big)$между ожидаемым E и фактическим R темпами роста цен, и имеет знак обратный этой разности.

В итоге получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dE}{dt} + \beta * E = \beta * R(t),$$

где E=E(t) – неизвестная нам функция инфляционного ожидания населения, R(t) – заданная функция фактического роста цен. Решение этого уравнения находится по схеме Бернулли или методом Лагранжа:$E(t) = C * e^{-\beta t} + \beta * e^{-\beta t}\int R(t)e^{\beta t}\,dt$.

В этих уравнениях величина β характеризует скорость адаптации населения к новым экономическим условиям: чем больше β , тем быстрее происходит адаптация.

Если ввести начальное условие: $E(0) = C_0$ то решение можно переписать в виде: $E(t) = C_0 e^{-\beta t} + \beta\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}R(t)d\tau$

Аппроксимация дробным дифференциальным уравнением. Если мы хотим аппроксимировать дробным дифференциальным уравнением, то перепишем уравнение в виде:${}_0D_t^{\alpha}E(t) + \beta E(t) = \beta R(t)$, где $0 < \alpha \le 1$.(5)

Мы можем решить уравнение (5), применяя преобразование Лапласа с обеих сторон. Итак, используя преобразование Лапласа по формуле (4) при n=1, получим $s^{\alpha}\overline{E(s)} + {}_0D_t^{\alpha-1}E(0) + \beta\overline{E(s)} = \beta\overline{R(s)}$,где $\overline{E(s)}$, $\overline{R(s)}$ – образы функций E(t) и R(t) по определению *(6)

Предположим, что ${}_0D_t^{\alpha-1}E(0)$ существует и равно C_0. Тогда из (6) имеем:

$E(t) = C_0 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta t^{\alpha}) + \beta\left(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta t^{\alpha})\right) * R(t)$,так как $\lim_{t\to 0+} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta t^{\alpha}) = 1$.

Параметр α характеризует степень угасания памяти об изменениях показателя и фактора на интервале [0,T].

Buketov University

Список использованной литературы

1. V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, Concept of dynamic memory in economics, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 55 (2018), 127–145. MR3693376
2. V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, Notion of dynamic memory in economic theory, Journal of Economy and Entrepreneurship, 11:6 (2017), 868–880.
3. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. / С. Г. Самко, А. А Килбас, О. И. Маричев./Минск, 1987.
4. Podlubny, I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. – 340с.

ОГРАНИЧЕННОЕ НА ПОЛУОСИ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭРЕДИТАРНОСТЬЮ

Айтенова Г.М., Сартабанов Ж.А.

Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: gulsezim-88@mail.ru, sartabanov42@mail.ru

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно искомой n-вектор-функций $u(x,t,\tau)$ вида

$$D_c u(x,t,\tau)-\frac{\partial^2 u(x,t,\tau)}{\partial x^2}=A(x,t,\tau)u(x,t,\tau)+$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} B(x,t,\tau,t-c\tau+cs,s)u(x,t-c\tau+cs,s)ds+f(x,t,\tau) \tag{1}$$

с оператором дифференцирования $D_c=\frac{\partial}{\partial\tau}-\left\langle c,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$ по (t,τ), где $c=(c_1,...,c_m)$ - постоянный вектор, $\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ - векторный оператор, $\tau\in(-\infty,+\infty)=R$, $t=(t_1,\ldots,t_m)\in R\times\ldots\times R=R^m$, $x\in(0,+\infty)=R_+,\varepsilon>0$ - постоянная, называемая периодом эредитарности; $A(x,t,\tau)$, $B(x,t,\tau)$ - $n\times n$-матрицы и $f(x,t,\tau)$ - (ω,θ)-периодическая по (t,τ) n-вектор-функция переменных $(x,t,\tau)\in R_+\times R^m\times R$, $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$. $\Delta_c=D_c-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ - оператор дифференцирования по (x,t,τ).

Рассматриваются задачи для различных вариантов уравнения (1) при (ω,θ)-периодическом граничном режиме

$$u(x,t,\tau)\big|_{x=0}=u^0(t,\tau). \tag{1^0}$$

Исследуются вопросы о многопериодичности по (t,τ) и ограниченности по $x\in R_+$ решений этих задач.

В частности, рассматривается уравнение

$$\Delta_c u(x,t,\tau)=0, \tag{2}$$

решения которого называются нулями оператора Δ_c.

С указанным граничным условием (1^0) рассматривается задача для неоднородного уравнения

$$\Delta_c u(x,t,\tau)=f(x,t,\tau). \tag{3}$$

На основе методик исследования краевых задач для уравнений (2) и (3) с граничным условием (1^0) изучаются вопросы качественного исследования для линейного однородного интегро-дифференциального уравнения