

Здесь φ_i^k есть решение следующей сопряженной задачи:

$$\varphi_{tt} - b\varphi_t - ar\left(\frac{1}{r}\varphi_r\right)_r + d\varphi = 0; \quad (21)$$

$$\varphi|_{t=T} = 0, \quad \varphi_t|_{t=T} = 0, \quad \varphi|_{r=A} = 0; \quad (22)$$

$$\varphi_r|_{r=0} = 2[y_0^k - f^k]. \quad (23)$$

Таким образом, итерационный метод решения обратной задачи можно осуществить по следующей схеме:

1. Задаем начальное приближение p_i^0 .
2. Решая прямую задачу (16)-(17), находим $y^{(0)}\{r_i, t_k; p_i^{(0)}\}$.
3. Вычислив краевое условие (23), решая сопряженную задачу (21)-(23), находим $\varphi^{(0)}\{r_i, t_k; p_i^{(0)}\}$.
4. По формуле (20) вычисляем градиент $\nabla_h J[p_i^{(0)}]$.
5. По формуле (11) находим очередное приближение $p_i^{(n+1)}$.
6. Проверяем значение функционала (19); если он достигнут, то задача решена, если нет, то повторяем новое приближение по перечисленным шагам 1-6.

References

1. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. Inverse GeOLECTRiCS. — M.: Science, 1991. — 304 p.
2. Samarskii A.A. Theory of difference schemes. — M.: Science, 1997. — 656 p.
3. Iskakov K.T., Oralbekova J.O. Discrete analog of the optimization method for solving the inverse problem for the parabolic kinetic equation // Vestnik Karaganda Univ. Ser. Mathematics. — № 2 (58). — 2010.
4. Yerdeneyeva A.A., Tyulepberdinova G.A. Discrete analog of the optimization method for inverse problem of electrodynamics in the quasistationary approximation // Vestnik Karaganda Univ. Ser. Mathematics. — № 2 (58) — 2010.

УДК 517.95

О спектральных вопросах и разрешимости одного особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода

About spectrum questions and about the solvability of one singular integral equation of Volterra of the second kind

Есбаев А.Н.¹, Рамазанов М.И.²

¹ИПК «Международная профильная академия «Туран-Профи», Астана;

² Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Мақалада Меллин түрлендіру әдісімен Вольтеррдің екінші текті интегралдық теңдеуі зерттелген. Сәйкес келетін интегралдық операторының ядросына белгілі шарттар қойылған. Берілген теңдеудің шешілгіштік шарттарымен спектрі табыған.

In the given article the integral equation of Volterra of second kind with the given conditions, some properties of kernel of this equation, the spectrum and also the solution of study equation with the application of integral transformation of Mellin have been investigated.

Теория интегральных уравнений имеет широкую область применения и лежит в основании многих разделов теоретической и особенно прикладной науки. Вид интегрального уравнения тесно свя-

зан с природой исследуемого явления. Так, интегральные уравнения Вольтерра возникают в тех задачах прикладного и физического содержания, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного (например, времени, энергии и т.д.).

Данная статья посвящена исследованию разрешимости и изучению спектральных вопросов одного особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

1. Предварительные сведения

Определение 1 [1]. Пусть X_1 и X_2 — банаховы пространства. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор A действует из пространства X_1 в X_2 , если область определения D_A оператора A совпадает с X_1 , а область значений R_A оператора A лежит в пространстве X_2 . Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \quad (1)$$

будем называть *множеством нулей*, или *ядром оператора A* . В рассматриваемом случае (оператор A ограничен) множество $KerA$ является подпространством пространства X_1 . Размерность подпространства $KerA$, то есть число линейно независимых решений уравнения (1), будем обозначать через α_A и записывать

$$\alpha_A = \dim KerA.$$

Через X_1^* и X_2^* будем обозначать пространства линейных ограниченных функционалов, определенных соответственно на пространствах X_1 и X_2 и именуемых пространствами, *сопряженными* с пространствами X_1 и X_2 соответственно. Через A^* обозначим оператор, *сопряженный* с оператором A . Этот оператор действует из X_2^* в X_1^* . Множество всех решений уравнения

$$A^*u = 0 \quad (2)$$

будем называть *множеством нулей*, или *ядром оператора A^** , и обозначать $KerA^*$. Множество $KerA^*$ является подпространством X_2^* . Обозначим

$$\alpha_{A^*} = \dim KerA^*.$$

Оператор A называется *нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа*, или *нормально разрешимым*, если неоднородное уравнение

$$Ax_1 = x_2$$

разрешимо для тех и только тех правых частей x_2 , которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения (2), то есть тогда, когда

$$u(x_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in KerA^*.$$

Другими словами, оператор A называется *нормально разрешимым* тогда и только тогда, когда область значений R_A оператора A является ортогональным дополнением к ядру $KerA^*$ сопряженного оператора A^* .

Теперь сформулируем определения нетерова оператора и его индекса.

Определение 2 [2]. Линейный ограниченный оператор $A: X_1 \rightarrow X_2$ называется *нетеровым*, если:

- 1) оператор A нормально разрешим;
- 2) числа α_A и α_{A^*} конечны.

Определение 3 [2]. *Индексом $IndA$* нетерова оператора A называется целое число

$$IndA = \alpha_A - \alpha_{A^*}.$$

Преобразование Меллина [3].

Пусть функция $f(t)$ определена при положительных t и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |f(t)| t^{\sigma_1 - 1} dt < +\infty, \quad \int_1^{\infty} |f(t)| t^{\sigma_2 - 1} dt < +\infty$$

при надлежащем выборе чисел σ_1 и σ_2 .

Преобразование Меллина функции $f(t)$ называется функция

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt \quad (s = \sigma + i\tau, \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \quad (3)$$

Формула обращения преобразования Меллина имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)t^{-s} ds \quad (t > 0, \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \quad (4)$$

где интеграл берется вдоль прямой $l: \operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s , и понимается в смысле главного значения.

Формулы (3), (4) называют формулами обращения Меллина.

Теорема о свертке для преобразования Меллина имеет следующий вид:

$$M \left\{ \int_0^{\infty} f(t)\varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right\} = F(s) \cdot \Phi(s). \quad (5)$$

Отсюда можно заключить, что преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений вида

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (6)$$

2. Постановка задачи

При отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач для некоторых дифференциальных уравнений естественным образом (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) возникают интегральные уравнения Вольтерра третьего рода

$$t^\alpha \varphi(t) - \lambda \int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (7)$$

В отличие от работы [4], в которой интегральное уравнение (7) подробно исследовано для действительных значений $\lambda \in R_+ \equiv (0; +\infty)$ и для ограниченного временного интервала $0 < t < I$, в данной работе исследуется вопрос о спектре и разрешимости уравнения (7) при условиях

$$\lambda \in C; \quad t \in R_+.$$

Уравнение (7) простым преобразованием $\mu(t) = t^\alpha \varphi(t)$ можно представить как особое интегральное уравнение второго рода

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t); \quad t \in R_+; \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda \in C. \quad (8)$$

Будем считать, что правая часть и решение интегрального уравнения (8) принадлежат классам функций, суммируемых с соответствующими весами:

$$e^{-t} f(t) \in L_1(R_+), \quad t^{-\alpha} e^{-t} \mu(t) \in L_1(R_+). \quad (9)$$

Из (9) также следует, что $e^{-t} \mu(t) \in L_1(R_+)$.

Исследование разрешимости интегрального уравнения (8) при условиях (9) проводится по следующей схеме:

– исследование свойств интегрального оператора [5]

$$K_{\lambda\mu} \equiv (I - \lambda A)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in R_+;$$

– исследование разрешимости однородного [5] и неоднородного особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода (8) с заданными условиями (9) при применении интегрального преобразования Меллина;

– исследование спектральных вопросов для особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода (8) при заданных условиях (9).

Запишем интегральное уравнение (8) в виде

$$(I - \lambda A)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in R_+,$$

где $K(t, \tau)$ определяется из равенства

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\tau^\alpha (t - \tau)^{1-\alpha}}; \quad 0 < \tau < t < \infty.$$

Норма интегрального оператора A , определяемого ядром $K(t, \tau)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \neq 0$. С учетом свойств гамма-функции это следует из соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^\alpha (t - \tau)^{1-\alpha}} &= \left| \begin{matrix} \tau = ty, d\tau = tdy, \\ \tau = 0, y = 0; \tau = t, y = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{tdy}{(ty)^\alpha (t - ty)^{1-\alpha}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1 - y)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} > 0. \end{aligned}$$

Так как в общем случае $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t h(\tau)d\tau = 0$, а $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^\alpha (t - \tau)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \neq 0$, то в связи с этими свойствами ядра $K(t, \tau)$ уравнение (8) названо *особым интегральным уравнением Вольтерра*.

Замечание. Как следует из теоремы об обратном операторе [1], неоднородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение, а соответствующее однородное интегральное уравнение — только тривиальное решение, если $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$, т.е. $|\lambda| < \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}$.

3. Решение однородного интегрального уравнения

Если ввести функцию $k(z)$ по формуле

$$k(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < 1; \\ \frac{1}{(z - 1)^{1-\alpha}}, & 1 < z < \infty, \end{cases}$$

то, принимая во внимание, что

$$k\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 0, & 0 < \frac{t}{\tau} < 1; \\ \frac{1}{\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)^{1-\alpha}}, & 1 < \frac{t}{\tau} < \infty \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < \tau < \infty; \\ \frac{\tau}{\tau^\alpha (t - \tau)^{1-\alpha}}, & 0 < \tau < t \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < \tau < \infty; \\ K(t, \tau) \cdot \tau, & 0 < \tau < t \end{cases}$$

можно записать уравнение (8) следующим образом:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = \mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = f(t),$$

или

$$\mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = f(t), \tag{10}$$

т.е. в виде (6), удобном для применения преобразования Меллина при решении этого интегрального уравнения.

Для однородного интегрального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (10),

$$\mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = 0$$

справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 [5]. Для всех значений s , таких, что $\operatorname{Re} s = s_1 < 1 - \alpha$, значения сумм в правых частях равенств

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n + (1 - \alpha - s_1)}{(n + 1 - \alpha - s_1)^2 + s_2^2}; \\ -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} &= s_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(n + 1 - \alpha - s_1)^2 + s_2^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad s = s_1 + is_2, \quad b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right),$$

положительны. Это означает, что величина $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda > 0$, а $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda$ имеет знак, равный противоположному знаку числа $s_2 = \operatorname{Im} s$.

Теорема 1 [5]. Для любых λ при $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi}$ однородное интегральное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (10), наряду с тривиальным решением, имеет нетривиальное решение вида $\mu(t) = t^{s^*}$, где s^* определяется как корень уравнения $1 - \lambda \tilde{k}(s) = 0$, причем $\tilde{k}(s) = B(1 - \alpha - s, \alpha)$, и $\operatorname{Re} s^* < 1 - \alpha$. Если же $\operatorname{Re} \lambda < \frac{\sin \pi \alpha}{\pi}$, то однородное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение.

4. Решение неоднородного интегрального уравнения

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение (10)

$$\mu(t) - \lambda \int_0^{\infty} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \mu(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f(t). \quad (10)$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Меллина (3) и используя теорему о свертке (5), получаем:

$$\tilde{\mu}(s)(1 - \lambda \tilde{k}(s)) = \tilde{f}(s); \quad (12)$$

$$\tilde{\mu}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \lambda \tilde{k}(s)}, \quad (13)$$

где $\tilde{k}(s)$ — изображение ядра $k(t)$ интегрального уравнения (10), причем

$$\begin{aligned} \tilde{k}(s) &= \int_0^{\infty} k(t) t^{s-1} dt = \int_1^{\infty} (t-1)^{\alpha-1} t^{s-1} dt = \left| t = z^{-1}; dt = -z^{-2} dz \right| = \\ &= -\int_1^0 \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{\alpha-1} z^{1-s} z^{-2} dz = \int_0^1 z^{1-s-2-\alpha+1} (1-z)^{\alpha-1} dz = \int_0^1 z^{-\alpha-s} (1-z)^{\alpha-1} dz. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что эйлеровый интеграл первого рода $B(p, q)$, так называемая бета-функция, равен

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0),$$

то изображение ядра интегрального уравнения (10) примет вид

$$\tilde{k}(s) = \int_0^1 z^{-\alpha-s} (1-z)^{\alpha-1} dz = B(1 - \alpha - s, \alpha), \quad \operatorname{Re} s < 1 - \alpha. \quad (14)$$

Учитывая свойства бета-функции и пользуясь ее представлением в виде ряда, получим:

$$B(1 - \alpha - s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n + 1 - \alpha - s}, \quad b_0 = 1, \quad b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right). \quad (15)$$

Функции $\tilde{\mu}(s)$ и $\tilde{f}(s)$ — преобразования Меллина функций $\mu(t)$, $f(t)$ соответственно

$$\tilde{\mu}(s) = \int_0^{\infty} \mu(t)t^{s-1} dt, \quad \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > \gamma,$$

и параметр γ выбран так, чтобы

$$\int_0^{\infty} |f(t)|t^{\gamma-1} dt < \infty.$$

Таким образом, по формуле обращения (4) решение уравнения (10) имеет следующий вид:

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)} t^{-s} ds, \quad \gamma < \operatorname{Re} s < 1-\alpha. \quad (16)$$

Здесь $\gamma < \sigma < 1$ выбрано так, чтобы $1-\lambda\tilde{k}(s) \neq 0$ для заданного значения λ , и интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s , (расположенной правее всех нулей функции $1-\lambda\tilde{k}(s) = 0$, $\operatorname{Re} s < 1-\alpha$), и понимается в смысле главного значения.

Если спектральный параметр λ расположен в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} \lambda > 0$), тогда общее решение интегрального уравнения (8) можно получить, прибавив к частному решению (16) общее решение соответствующего однородного уравнения.

Преобразуем решение (16). Для этого воспользуемся соотношением, полученным при подстановке (13) в (12):

$$\frac{\tilde{f}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)} = \tilde{f}(s) + \frac{\lambda\tilde{k}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)} \cdot \tilde{f}(s)$$

или

$$\tilde{\mu}(s) = \tilde{f}(s) + \frac{\lambda\tilde{k}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)} \cdot \tilde{f}(s). \quad (17)$$

Если теперь ввести обозначение

$$\tilde{r}(s) = \frac{\tilde{k}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)},$$

то, используя формулу свертки для преобразования Меллина (5), из (17) получим:

$$\mu(t) = f(t) + \lambda \int_0^{\infty} r\left(\frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (18)$$

где $r(\theta)$ — обратное преобразование Меллина (оригинал) образа $\tilde{r}(s)$. Функция $r(\theta)$ называется *резольвентой* интегрального уравнения.

Найдем явное выражение для резольвенты $r(\theta)$. По формуле обращения (4) находим

$$r(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{k}(s)}{1-\lambda\tilde{k}(s)} \theta^{-s} ds, \quad \gamma < \operatorname{Re} s < 1-\alpha. \quad (19)$$

Для вычисления (19) применим теорему Коши о вычетах и лемму Жордана.

При $0 < \theta < 1$ в контур интегрирования включаем полуокружность, лежащую в левой полуплоскости. В этом случае если $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то подынтегральная функция имеет единственную особенность в точке s^* , которая является нулем функции $A(s) = 1-\lambda\tilde{k}(s)$ и одновременно простым полюсом функции $\tilde{r}(s)$.

Таким образом, для случая $\operatorname{Re} \lambda > 0$ имеем

$$r(\theta) = \operatorname{res} \left(\frac{\tilde{k}(s^*)}{1-\lambda\tilde{k}(s^*)} \cdot \theta^{-s^*} \right) = -\frac{\tilde{k}(s^*)}{\lambda\tilde{k}'(s^*)} \cdot \theta^{-s^*};$$

$$r(\theta) = \frac{1}{\lambda} l(s^*) \theta^{-s^*}; \quad 0 < \theta < 1, \quad (20)$$

где $l(s^*)$ — величина, обратная логарифмической производной $\tilde{k}(s)$ в точке $s = s^*$:

$$l(s^*) = -\frac{\tilde{k}(s^*)}{\tilde{k}'(s^*)}. \tag{21}$$

Значит, из (18) с учетом (20) и (21) следует, что решение неоднородного интегрального уравнения (8) можно записать в следующем виде:

$$\mu(t) = f(t) + \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} l(s^*) \int_0^t \frac{t^{-s^*}}{\tau^{-s^*}} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau};$$

$$\mu(t) = f(t) + l(s^*) \int_0^t \frac{\tau^{s^*-1}}{t^{s^*}} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Для рассмотрения случая $\text{Re } \lambda < 0$ необходимо учесть:

– во-первых, для $s_1 \in R_+$ сумма ряда

$$\tilde{k}(s_1) = S(s_1) = \frac{1}{1 - \alpha - s_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n + 1 - \alpha - s_1}$$

может принимать как положительные, так и отрицательные значения;

– во-вторых, определяя функцию $\tilde{k}(s)$ через (14) и (15) как сумму ряда

$$\tilde{k}(s) = S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n + 1 - \alpha - s}, \quad s \in C,$$

мы, фактически, продолжаем ее аналитически на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа точек $s = n + 1 - \alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в которых она имеет только простые полюсы.

Вернемся к уравнению относительно s

$$A(s) = 1 - \lambda \tilde{k}(s) = 0, \text{ т.е. } \tilde{k}(s) = S(s) = \frac{1}{\lambda}.$$

Итак, для случая $\lambda \in R$ (т.е. $\text{Im } \lambda = 0$) имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Если для заданного значения $\lambda_1 = \text{Re } \lambda$ на полуоси $s_1 = \text{Re } s < 1 - \alpha$ функция $A(s_1) = 1 - \lambda_1 \tilde{k}(s_1)$ имеет единственный нуль при $\lambda_1 > 0$ и не имеет нулей при $\lambda_1 < 0$, то на полуоси $s_1 > 1 - \alpha$ для любых значений λ_1 эта функция имеет счетное число нулей.

На основании леммы 2 и соотношений (11) получим, что в случае $\text{Re } \lambda < 0$ (для любого фиксированного λ) особенности подынтегральной функции суть нули функции

$$A(s) = 1 - \lambda \tilde{k}(s): \quad s = s_k^0 = s_{1k}^0 + i s_{2k}^0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

расположенные в полуплоскости $\text{Re } s > 1 - \alpha$, так что

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau.$$

Суммируя вышеизложенное, т.е. учитывая, что общее решение интегрального уравнения (8) можно получить, прибавив к частному решению неоднородного интегрального уравнения общее решение соответствующего однородного уравнения, а также теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. Для любой функции $f(t)$ неоднородное интегральное уравнение (8) имеет решение из класса (9)

$$\mu(t) = f(t) + l(s^*) \int_0^t \frac{\tau^{s^*-1}}{t^{s^*}} f(\tau) d\tau + C \cdot t^{s^*}, \quad \text{если } \text{Re } \lambda > 0;$$

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad \text{если } \text{Re } \lambda < 0.$$

Для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно убедиться, что полученное решение $\mu(t)$ принадлежит классу (9). Действительно, для $\text{Re } \lambda > 0$ имеем

$$e^{-t}\mu(t) = e^{-t}f(t) + \lambda \cdot I(s^*) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{s^*} \cdot e^{-\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + C \cdot e^{-t} t^{s^*}.$$

Нам нужно только показать, что интегральное слагаемое принадлежит классу $L_1(R_+)$. Это следует из неравенства

$$\left| \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{s^*} \cdot e^{-\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq \int_0^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{s^*} |e^{-\tau} f(\tau)| \frac{d\tau}{\tau},$$

правая часть которого в силу теоремы о свертке (в смысле Меллина) (5) суммируема на R_+ .

Аналогичное неравенство имеет место и для случая $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Отметим, что интегральный оператор $I - \lambda A$ интегрального уравнения (8)

$$(I - \lambda A)\mu = f,$$

где

$$A\mu(t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad 0 < \tau < t < \infty,$$

нормально разрешим, так как мы построили его решение конструктивным путем.

Так как соответствующее однородное уравнение $(I - \lambda A)\mu = 0$ имеет только одну собственную функцию, индекс оператора равен 1.

Нетеровость здесь понимается в смысле, что однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с заданным (непрерывным, суммируемым с квадратом и др.) ядром имеет только тривиальное решение, а в нашем случае есть одна собственная функция [6].

Заключение

Таким образом, показано, что особый интегральный оператор Вольтерра второго рода является нетеровым и имеет индекс 1.

References

1. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of theory of functions and function analysis. — M.: Science, 1981. — 542 p.
2. *Litvinchuk G.S.* Boundary problems and singular integral equations with the displacement. — M.: Science, 1977. — 448 p.
3. *Krasnov M.L., Kiselyev A.I., Makarenko G.I.* Integral equations. — M.: Science, 1976. — 215 p.
4. *Nahushev A.M.* Inverse problems for degeneration equations and the integral equation of Volterra of third kind // Differential equations. — 1974. — Т. X. — № 1. — P. 100—111.
5. *Yesbayev A.N., Ramazanov M.I.* About the research of integral equation of Volterra of the second kind with the given conditions // Bulletin KarSU. Ser. Mathematics. — Karaganda, 2009. — № 2(54). — P. 15—20.
6. *Chebotaryev G.N.* Operators of Neter. — Kazan: The moskery of Kazan. un-ty, 1984. — 47 p.