

КОНДЕНСАЦИЯ ЛАНҒАН КҮЙДІҢ ФИЗИКАСЫ ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 524.882

А.Б.Алтайбаева

*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: aziza.bibol@mail.ru)*

Геометротермодинамика черных дыр Рейсснера-Нордстрема

В статье рассматривается частный случай по изучению термодинамики и геометротермодинамики черной дыры Рейсснера-Нордстрема в четырех пространственно-временных измерениях. Для четырехмерной статической черной дыры Рейсснера-Нордстрема определены точки сингулярности, при которых происходят фазовые переходы второго рода. Показано, что равновесное многообразие черной дыры Рейсснера-Нордстрема является искривленным. Кривизна появляется в тех местах, где происходят фазовые переходы второго рода. Найдены зависимости термодинамических параметров четырехмерных черных дыр Рейсснера-Нордстрема.

Ключевые слова: черные дыры, Риманова геометрия, фазовый переход, скаляр кривизны, термодинамические параметры, геометротермодинамика, черная дыра Рейсснера-Нордстрема.

В последнее время дифференциальная геометрия стала важным элементом теоретической физики. Один из самых интересных примеров применения римановой геометрии в общей теории относительности является теория гравитационного поля. Действительно, сегодня принимаем гравитацию как проявление кривизны пространства-времени Римана, так как измерение кривизны эквивалентно измерению гравитационного взаимодействия. Это является следствием удивительного принципа «поле=кривизна», предложенного первоначально Эйнштейном [1].

Поскольку напряженность, существующая в поле, может рассматриваться как мера гравитационного взаимодействия, то идеи об общей теории относительности могут быть сведены к принципу «взаимодействие=кривизна». Такой же принцип действует и в случае калибровочных теорий.

Важным разделом теоретической физики является термодинамика. Можно ли представить ее в контексте дифференциальной геометрии. Первые попытки в этом направлении были сделаны в первых работах Гиббса [2] и Каратеодори [3], которые были введены в термодинамику на языке дифференциальных форм. Риманова геометрия была впервые представлена в статистической физике и термодинамике Рау [4] в 1945 г. с помощью метрических компонент, которые в локальных координатах совпадают с информационной матрицей Фишера. Метрика Гессена была использована для интенсивного изучения геометрии термодинамики обычных систем и черных дыр, но был найден ряд несоответствий и противоречий между ними [5–13]. Эти загадочные результаты являются следствием того, что метрика Гессена является неинвариантной относительно преобразований Лежандра [14], в то время как классическая термодинамика сохраняет инвариантность Лежандра, т.е. не зависит от выбора термодинамического потенциала.

В последние годы решение для черной дыры более чем в четырех пространственно-временных измерениях является предметом интенсивных исследований. Расширение общей теории относительности к высшим размерностям риманового пространства-времени представляет больше информации о фундаментальных свойствах черных дыр. С размерностью больше чем четыре теоремы единственности не поддерживаются в связи с тем, что есть много возможностей, чтобы использовать больше степеней свободы. В связи с этим в данной работе рассматривается частный случай черной дыры Рейсснера-Нордстрема с размерностью $d = 4$ [1].

Различные виды черных объектов были определены в высших измерениях пространства-времени [15]. Многомерные черные объекты относятся к топологии горизонта. И следовательно, в четырехмерной конфигурации топология горизонта Килинга тривиально фиксируется как S^2 . Но в пяти измерениях можем иметь различную топологию, как и для черных объектов с особенностью кольца. Топология струны для черных дыр в супергравитации расширения многомерной общей теории относительности $S^2 \times \mathbb{R}$. Кроме того, структура фазового перехода черных дыр выглядит совершенно поразному. Размерность теории предсказывает, как и когда происходят или не происходят некоторые фазовые переходы. Эти различные характерные черты черных объектов в многомерных теориях гравитации (в том числе вакуумных ОТ, Эйнштейна-Янга-Миллса и других) побуждают нас к исследованию формализма ОТО в этой новой области [1].

Черная дыра Рейсснера-Нордстрема размерности $d = 4$

Решение для заряженной черной дыры Рейсснера-Нордстрема (RN), где отсутствует угловой момент, может распространяться для любой размерности. Соответствующая метрика в d пространственно-временных измерениях выражается как [1]

$$ds^2 = -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-2)}^2, \tag{1}$$

где $d\Omega_{(d-2)}^2$ — грань элемента на $(d - 2)$ -мерной единичной сфере; $\Omega_{(d-2)} = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma(\frac{d-1}{2})$ и V определяется как

$$V = 1 - \frac{16\pi GM}{(d-2)\Omega_{(d-2)}} \frac{1}{r^{d-3}} + \frac{8\pi G}{(d-2)(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2(d-3)}}. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) для $V = 0$, можно найти горизонт событий любой размерности и, таким образом получить области энтропии.

Рассмотрим частный случай при $d = 4$ и далее будем применять эту размерность для нахождения необходимых уравнений термодинамики и геометротермодинамики [1]. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$V = 1 - 4\pi G \frac{M}{r} + 4\pi G \frac{Q^2}{r^2}, \tag{3}$$

так как $\Omega_2 = 2\pi^{\frac{1}{2}} / \Gamma(\frac{3}{2}) = 2\pi^{\frac{1}{2}} / \sqrt{\pi} = 2$.

На рисунке 1 приведена зависимость объема V четырехмерной черной дыры RN от его радиуса r при различных значениях массы и теплоты: 1-я кривая (верхняя) соответствует $M = 1, Q = 0,5$; 2-я кривая (средняя) — $M = 2, Q = 1,5$; 3-я кривая (нижняя) — $M = 3, Q = 2,5$.

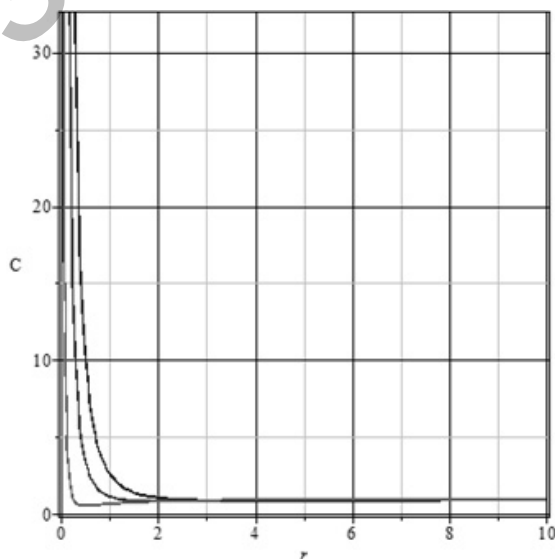


Рисунок 1. Зависимость объема V четырехмерной черной дыры RN от его радиуса r

А. Термодинамика

Основное уравнение энтропии имеет вид [1]

$$S(M, Q) = \left(M + M \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}} \right)^2. \quad (4)$$

На рисунке 2 приведена зависимость энтропии S четырехмерной черной дыры RN от массы M при различных значениях теплоты.

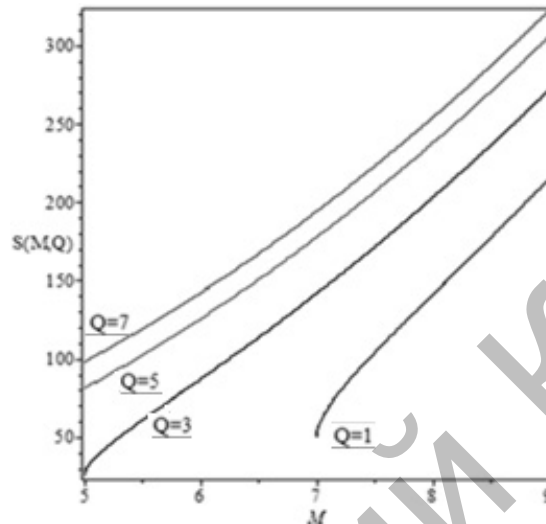


Рисунок 2. Зависимость энтропии S четырехмерной черной дыры RN от массы M

Используя уравнение (3), получим функцию массы [1]:

$$M(S, Q) = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{S^{\frac{1}{2}}}, \quad (5)$$

что удовлетворяет первому закону термодинамики $dM = TdS + \phi dQ$, где ϕ обычно интерпретируется как электрический потенциал. Тогда температура и электрический потенциал равны

$$T(S, Q) = \frac{1}{4} \frac{S - Q^2}{S^{\frac{3}{2}}}, \quad \phi(S, Q) = \frac{Q}{S^2}. \quad (6)$$

В экстремальных пределах

$$\left. \frac{Q^2}{M^2} \right|_{\text{экстремал}} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \left. \frac{Q^2}{S} \right|_{\text{экстремал}} = 1. \quad (7)$$

В этом случае температура черной дыры исчезает, а электрический потенциал остается постоянной величиной. Кстати, в экстремальном случае получается $M^2 = \phi^2 Q^2$. Теперь вычислим функцию, соответствующую потенциалу ϕ черной дыры RN , чтобы увидеть точки, где, скорее всего, происходят фазовые переходы. Теплоемкость при постоянной теплоте записывается как

$$C_Q = \frac{M_S}{M_{SS}} = -\frac{2S(Q^2 - S)}{3Q^2 - S}, \quad (8)$$

где $M_S = \partial M / \partial S$ и т.д. На рисунке 3 задается зависимость теплоемкости от энтропии и теплоты.

Имеются еще две функции отклика, которые могут быть определены в этом ансамбле:

– изэнтропическая сжимаемость

$$\kappa_S = \frac{M_{QQ}^{-1}}{Q} = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{Q}; \quad (9)$$

– изэнтропическое расширение

$$\alpha_S = \frac{M_{SQ}^{-1}}{Q} = -2 \frac{S^{\frac{3}{2}}}{Q^2}. \tag{10}$$

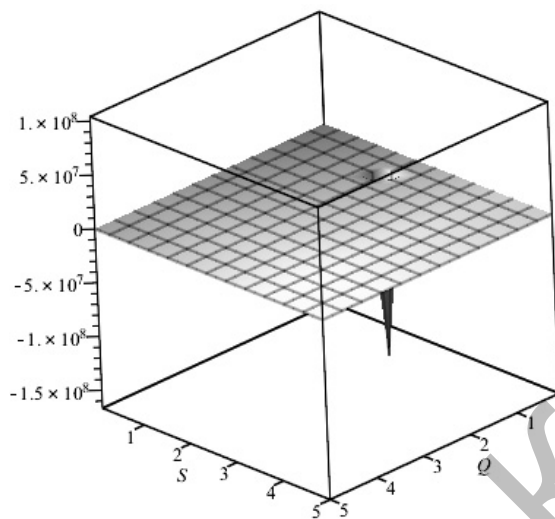


Рисунок 3. Зависимость теплоемкости C четырехмерной черной дыры RN от энтропии S и теплоты Q . Здесь также видна критическая точка, соответствующая уравнению (7)

Кроме того, отметим, что возможно расхождение теплоёмкости, которое имеет место, когда знаменатель уравнения (7) равен нулю, т.е. когда

$$\left. \frac{Q^2}{S} \right|_{\text{фазовый переход}} = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Можно доказать, что это значение находится в области черной дыры, т.е. что условие

$$\frac{Q^2}{M^2} \leq 1 \tag{12}$$

выполнено. С помощью уравнения (3) можем переписать уравнение (10), тогда

$$\frac{Q^2}{M^2} = \frac{3}{4}, \tag{13}$$

которое легко доказать для внутренней области черной дыры при значении $d = 4$.

Интересно отметить, что структуры фазового перехода черной дыры могут зависеть от выбранного ансамбля. Например, если мы используем ансамбль, соответствующий «энтальпии»,

$$H = M - \phi Q;$$

$$H(S, \phi) = -S^{\frac{1}{2}} \frac{\phi^2 - 1}{2}, \tag{14}$$

из которых можем вычислить

$$C_\phi = \frac{H_S}{H_{SS}} = -2S. \tag{15}$$

Заметим, что теплоемкость при постоянном ϕ имеет особенности, поэтому мы не ожидаем в этом ансамбле фазовые переходы из термодинамического анализа.

В. Геометротермодинамика

Учитывая фундаментальные уравнения (4), (5) и общую метрику, мы можем вычислить в частности метрику и скаляр кривизны для черной дыры RN как в представлении энтропии, так и в энергетическом представлении [1]. Метрики $\Phi = S$ и $E^a = \{M, Q\}$ запишутся в виде

$$g_s'' = \frac{\left[M + \frac{M}{2}E(M, Q)\right]^4}{D(M, Q)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -16[(4Q^2 - 4M^2)E(M, Q) + 12Q^2 - 8M^2]dM^2 - \\ -16[(2Q^2 - 2M^2)E(M, Q) - 4M^2]dQ^2 \end{array} \right\}, \quad (16)$$

где

$$D(M, Q) = M^2(2Q^2 - 2M^2)E(M, Q)(2 + E(M, Q))^2 \quad (17)$$

и

$$E(M, Q) = 2\sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}}. \quad (18)$$

Скаляр кривизны

$$R_s'' = \frac{N_1(M, Q)}{A_1(M, Q)^2 B_1(M, Q)^2}, \quad (19)$$

где

$$A_1(M, Q) = (4Q^2 - 4M^2)E(M, Q) + 12Q^2 - 8M^2 \quad (20)$$

и

$$B_1(M, Q) = [2Q^2 - 2M^2]E(M, Q) - 4M^2. \quad (21)$$

Используя программное обеспечение для алгебраических преобразований, мы находим, что единственный реальный положительный корень знаменателя скаляра кривизны (18) дается решением

$$M|_{\text{сингуляр}} = \frac{2Q}{\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Кроме того, может быть доказано, что $N_1(M, Q)$ никогда не равно нулю. Из формул (11) и (22) можно сделать вывод, что на самом деле скаляр кривизны расположен именно в тех точках, где происходят фазовые переходы [1]. Графическое изображение скаляра кривизны представлено на рисунке 4, где подробно показываются точки сингулярности.

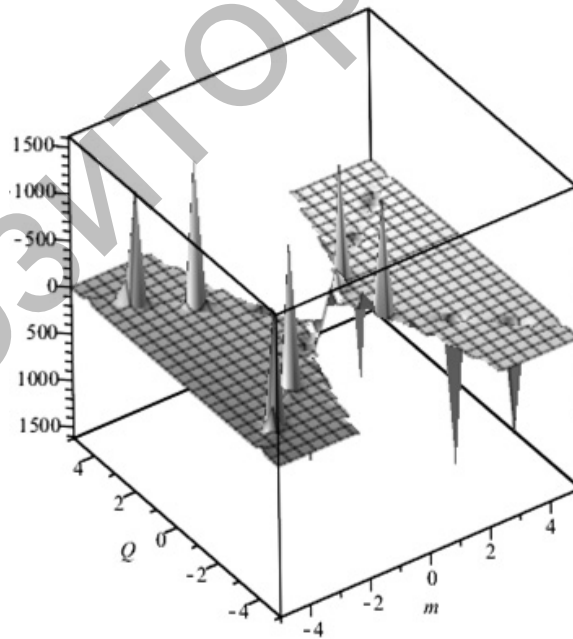


Рисунок 4. Зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии в зависимости от массы и теплоты

Чтобы показать, что приведенные выше результаты инвариантны, используем в качестве термодинамического потенциала $\Phi = M$ и $E^a = \{S, Q\}$, удовлетворяющие основным уравнениям (14). Тогда из общей термодинамической метрики получаем

$$g_M'' = A_2(S, Q) \left(-\frac{B_2(S, Q)}{128S^3} dS^2 + \frac{1}{8S} dQ^2 \right), \quad (23)$$

из которой вычисляем скаляр кривизны

$$R_M'' = \frac{N_2(S, Q)}{A_2(S, Q)^4 B_2(S, Q)^3}, \quad (24)$$

где

$$A_2(S, Q) = 2S + 6Q^2 \quad (25)$$

и

$$B_2(S, Q) = 6Q^2 - 2S^2. \quad (26)$$

Снова, используя программное обеспечение для алгебраических преобразований, можно увидеть, что единственные точки расхождения задаются

$$\frac{Q^2}{S^2} \Big|_{\text{сингуляр}} = \frac{1}{3}, \quad (27)$$

что совпадает с условием фазовых переходов в уравнении (11). Еще раз видим конкретную связь между кривизной метрики (9) и термодинамическим взаимодействием. Графическое изображение скаляра кривизны представлено на рисунке 5, где подробно показываются точки сингулярности.

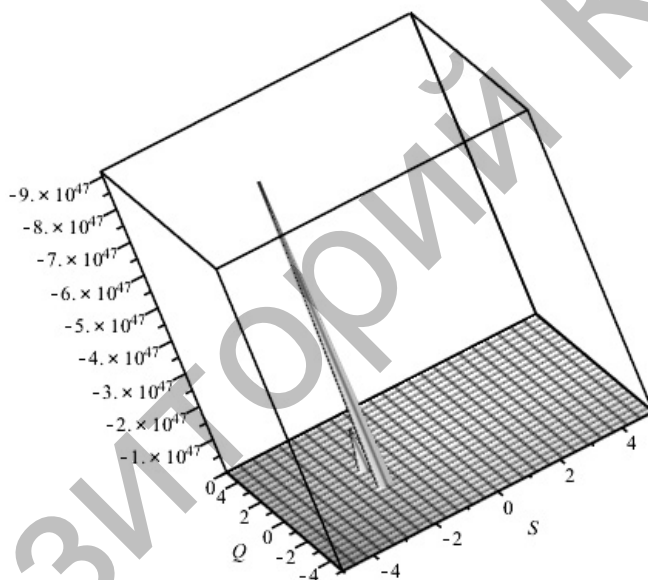


Рисунок 5. Зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии в зависимости от энтропии и теплоты

Чтобы рассмотреть поведение анализа ГТД в отношении различных ансамблей, мы обратимся к метрике и запишем его с помощью фундаментального уравнения (14), так что $\Phi = H$ и $E^a = \{S, \phi\}$. В результате имеем

$$g_H'' = \frac{5\phi^2 - 1}{16} \left(\frac{\phi^2 - 1}{2S} dS^2 + 4Sd\phi^2 \right). \quad (28)$$

Следовательно, скаляр кривизны примет вид

$$R_H'' = \frac{N_3(S, \phi)}{A_3(S, \phi)^3 B_3(S, \phi)^2}, \quad (29)$$

где

$$A_3(S, \phi) = 10\phi^2 - 2, \quad (30)$$

т.е. конформный фактор в метрике (28) и

$$B_3(S, \phi) = \phi^2 - 1. \quad (31)$$

Таким образом, первый фактор в знаменателе, будучи конформным фактором в метрике (24), равен $SH_S + \Phi H_\Phi$, который, в свою очередь, согласно тождеству Эйлера, пропорционален H . Первое слагаемое в знаменателе скаляра кривизны равно нулю только тогда, когда термодинамический потенциал равен нулю, $H=0$. Учитывая уравнение состояния $\varphi = \partial M / \partial Q$, второй фактор оказывается равным нулю для $S^2 = Q^4$, который в точности соответствует экстремальному пределу черной дыры (6) с нулевой температурой. Это связано с тем, что в этом случае метрика g_H'' вырождается в экстремальных пределах. Таким образом, единственные особенности возникают из-за границы применимости термодинамического подхода к черной дыре, где мы также ожидаем, что подход ОТО отрицается [1]. Графическое изображение скаляра кривизны представлено на рисунке 6, где подробно показываются точки сингулярности.

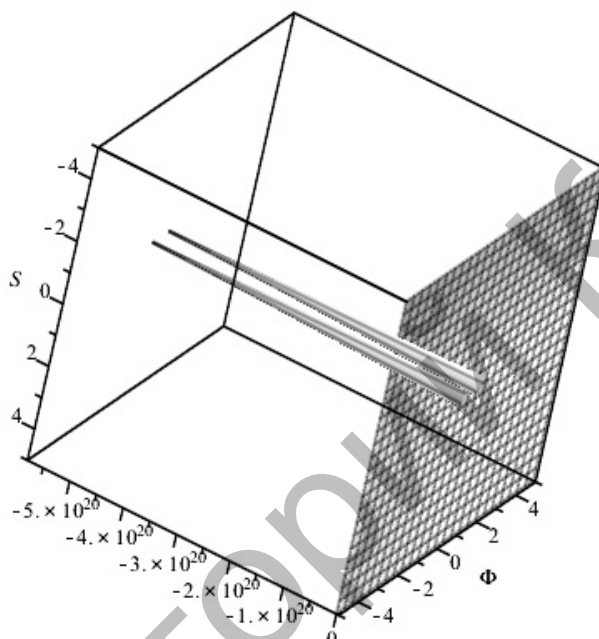


Рисунок 6. Зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии в зависимости от энтропии и термодинамического потенциала

Мы пришли к выводу, что скаляр кривизны в этом ансамбле не имеет настоящих особенностей и сигнализирует об отсутствии фазовых переходов, в соответствии с результатами, полученными при изучении соответствующей теплоемкости (14).

Список литературы

- 1 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Quevedo H. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes // *General Relativity and Gravitation*. — 2013. — Vol. 45, № 8. — P. 1603–1617.
- 3 Gibbs J.W. The collected works. — Vol. 1. Thermodynamics. — Yale University Press, 1948. — 474 p.
- 4 Caratheodory C. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik // *Math. Ann.* — 1909. — Vol. 67. — P. 355–386.
- 5 Rao C.R. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters // *Bull. Calcutta Mathematical Society*. — 1945. — Vol. 37. — P. 81.
- 6 Amari S. Differential-Geometrical Methods in Statistics. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — Vol. 28.
- 7 Aman J.E., Bengtsson I., Pidokrajt N. Geometro-thermodynamics of tidal charged black holes // *General Relativity and Gravitation*. — 2003. — Vol. 35. — P. 1733.
- 8 Aman J.E., Pidokrajt N. Geometry of higher-dimensional black hole // *Physical Review D*. — 2006. — Vol. 73. — P. 024017.
- 9 Aman J.E., Pidokrajt N. Flat Information Geometries in Black Hole Thermodynamics // *General Relativity and Gravitation*. — 2006. — Vol. 38. — P. 1305–1315.

- 10 Shen J., Cai R.G., Wang B., Su R.K. Thermodynamics geometry and critical behavior of black holes // International Journal of Modern Physics A. — 2007. — Vol. 29, № 01.
- 11 Cai R.G., Cho J.H. Thermodynamic curvature of the BTZ black hole Phys // Physical Review D. — 1999. — Vol. 60.
- 12 Sarkar T., Sengupta G., Tiwari B.N. On the thermodynamic geometry of BTZ black holes // J. High Energy Physics. — 2006. — doi:10.1088/1126-6708/2006/11/015
- 13 Medved A.J.M. A Commentary on Ruppeiner Metrics for Black Holes // Modern Physics Letters A. — 2008. — Vol. 23, № 26.
- 14 Mirza B., Zamaninasab M. Ruppeiner Geometry of RN Black Holes: Flat or Curved? // J. High Energy Physics. — 2007. — doi:10.1088/1126-6708/2007/06/059
- 15 Quevedo H. Geometrothermodynamics // Journal of Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 48, № 1. — ID 013506.
- 16 Quevedo H. Geometrothermodynamics of black holes // General Relativity and Gravitation. — 2008. — Vol. 40, № 5. — P. 971–984.

А.Б.Алтайбаева

Рейсснер-Нордстрем кара құрдымының геометротермодинамикасы

Мақалада төрт өлшемді кеңістіктік-уақыттық Рейсснер-Нордстрем кара құрдымының термодинамикасы мен геометротермодинамикасын зерттеуде дербес жағдай қарастырылған. Төртөлшемді статикалық Рейсснер-Нордстрем кара құрдымындағы екінші текті фазалық ауысулар болып өтетін сингулярлық нүктелері анықталған. Рейсснер-Нордстрем кара құрдымының тепе-теңдік алуан түрлілігі жалпы жағдайда қисық болатыны көрсетілген. Қисықтықтың дәл екінші текті фазалық ауысулар болып өтетін жерлерде пайда болатыны, сондай-ақ төртөлшемді Рейсснер-Нордстрем кара құрдымының термодинамикалық параметрлерінің тәуелділігі анықталған.

A.B.Altabayeva

Geometrothermodynamics black holes Reissner-Nordström

The article considers a particular case on studying thermodynamics and geometrothermodynamics of the black hole Reissner-Nordström in four spacetime dimensions. For the four static black hole Reissner-Nordström of singularity defined points at which a phase transitions of of the second kind. It is shown that the equilibrium manifold black hole Reissner-Nordström are crooked. The curvature appears in those places where there are second order phase transitions. The dependence of the thermodynamic parameters of the four-dimensional black holes Reissner-Nordström.