

УДК 165(075), 530.1

**Современные методы геометрических идей в теоретической физике**

**The modern methods of geometrical ideas in theoretical physics**

Арынгазин К.М., Васильева И.Ф.

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: aryngazin\_k\_m@mail.ru)*

Мақалада теориялық физиканың геометризациясы жүйелердің өзара әсерлері мен күйін сипаттаудың қазіргі заманғы әдісі ретінде қарастырылады. Әр түрлі мысалдарда өзара әсерлердің пішінін олардың физикалық табиғатына тәуелсіз анықтауға болатын геометриялық принциптердің ерекшеліктері көрсетілген. Оған дәлел ретінде Эйнштейннің, Миллстың, Янгтың, Утияманың, Сакурайдың, Хиггстың, Тейлордың, Славновтың және тағы басқалардың әдістері қолданылған. Ғажайып ішек теориясы фундаменталды өзара әсерлер теориясының қазіргі замандық тәсілі ретінде жан-жақты тұжырымдалады. Кеңістікте кері итеруші әсермен кеңейтілген «қара энергия» түсінігінің қажеттілігі негізделеді.

In this article the geometrization of theoretical physics is considered as one of the modern method for description of system state and interaction. By the different examples the advantage of geometrical principles which allow the form of interaction determining independently of their physical nature is shown. For proof ones the methods of Einstein, Mills, Yang, Utiyama, Sakuraya, Higgs, Teilor, Slavnov and others are used. The theory of superstrings as a modern variant of the unify theory of fundamental interactions is analyzed. The necessity of «dark energy» definition which expands the universe by repulsive action is substantiated.

Мы не всегда встречаем живое, непринужденное сотрудничество истинно глубоких физических и формально-математических, взаимодополняющих и обогащающих друг друга идей. Раскрытие их сущности имело бы не только научно-методическое, но и познавательное значение. Например, нам известно, что рождение и уничтожение материи из вакуума, и не только из вакуума, всегда сопровождается рождением и уничтожением пространств — времени, которые служат фундаментом для построения физической теории.

Следовательно, наша задача — на лекциях раскрыть роль геометризации физического мышления и на примерах показать, как геометрические идеи воплощаются в известных физических явлениях. При этом выяснить, как и что заложено в основе этих теорий. В качестве примера рассмотрим один из методов квантовой теории поля (КТП), предложенный Фейнманом, — так называемый геометрический подход континуального интеграла.

В этом методе основные величины в теоретической физике выражаются через фейнмановские интегралы [1]. Этот интеграл можно записать в следующей, привычной для студентов форме:

$$\langle A \rangle = \int A(\psi) \exp(iS(\psi)) D(\psi).$$

Это символическая запись, содержание которой подлежит физической и геометрической интерпретации. В уравнении  $\psi$  — поле материи,  $A$  — поле взаимодействия,  $S(\psi)$  — функционал действия, который определяется выражением

$$S(\psi) = \int L(\psi) d^4x,$$

где  $L(\psi)$  — плотность Лагранжиана,  $\exp[iS(\psi)]D(\psi)$  — символ некоторой меры на функциональном пространстве полей материи. Эта мера в математическом смысле редко определяется. Раскрытие ее смысла имело бы большое научно-методическое и познавательное значение.

Известно, что выражение

$$\delta S(\psi) = \delta \int L(\psi) d^4x = 0$$

называется уравнением движения и его смысл может быть истолкован различным образом.

Например, функция  $\psi$  в классической физике играет роль «поля сил» вне источника. Если состояние системы материальных точек характеризуется функцией  $\psi$  в классическом смысле и движение происходит в евклидовом пространстве, то мы получим знаменитую механику Ньютона, если в конфигурационном — то механику Лагранжа, а если в фазовом пространстве — то механику Гамильтона. Классическая теория гравитации (ОТО) является нелинейной геометрической теорией искривленных четырехмерных многообразий (Риманова геометрия), и если  $\psi$  учитывает это искривление, то получим механику Эйнштейна, а в пространстве Минковского — СТО с принципом постоянства скорости.

В применении к квантовой теории поля  $\psi$  принято рассматривать как набор функций на пространстве–времени, снабженных тензорами, спинорами и внутренними индексами (теория внутренних симметрий). Рассмотрев  $\psi$  в пространстве векторов состояния, мы получим механику Шредингера–Гейзенберга, в спинорном пространстве — механику Дирака, а если  $\psi$  — поле дираковской частицы, то решение уравнений движения может истолковываться квантово-механически, как волновые функции частицы. С некоторыми оговорками  $\psi$  интерпретируются как определенные решения уравнений Максвелла в электродинамике (как волновые функции фотонов).

Лагранжиан в квантовой теории поля

$$L(A_\mu, \psi) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi\bar{\psi} - e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

где  $\gamma^\mu$  — матрица Дирака;  $m$  — масса;  $e$  — заряд, можно рассматривать как сокращенную запись списка основных полей и взаимодействий, заложенных в теорию. Из квадратичной части извлекаются пропагаторы свободных полей.  $-e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$  является членом взаимодействия  $A_\mu$  и  $\psi$  или называется «вершиной» в диаграммах Фейнмана, и амплитуды процесса записываются через них.

Из этой аналогии видно, что физическая теория развивается в двух взаимодополняющих друг друга направлениях: теоретико-полевом и геометрическом, и становится ясным, что геометризация физики, начавшаяся с эйнштейновской идеи связать гравитацию с кривизной пространства–времени, заложила основу сотрудничества физики и геометрии. Она, нам кажется, будет еще эффективнее, если удастся построить супергравитационные, суперструнные и супермембранные теории, опираясь на геометрические величины расширенных бозонов и фермионов. Две эти проблемы — суперсимметрия и геометризация динамики в терминах суперпространства, думается, проблемы ближайшего будущего. Ответ может быть найден либо в теории  $SU(5)$ , либо в теории  $SU(10)$ , либо в какой-то более фундаментальной теории, но при этом становится загадкой, почему природа должна выделить одну из множеств допустимых симметрий и их геометрий.

В качестве примера рассмотрим и другие теории, и в дальнейшем постараемся дать ответ на последний, очень непростой вопрос, почему геометризация подыгрывает физике.

Изучение теоретической физики показывает, что она сегодня страдает пренебрежительным отношением к законам геометрии и геометрическим идеям. Мы видим, что от этого больше страдает сама теоретическая физика, нежели геометрия. Опыт показывает, как только математиками и физиками-теоретиками выдвигаются новые геометрические идеи, теоретическая физика начинает преобразовываться, появляется внутренняя логика, а сама она оживает и начинает бурно развиваться. Мы знаем, что геометрия пространства и времени сама по себе не существует, она определяется взаимодействием тел, внутренней структурой, иными словами, каждый вид взаимодействий создает свою собственную геометрию, соответствующую своей природе. Следовательно, аппарат геометрии есть и аппарат физики.

В последние годы, с теориями элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий сложилась аналогичная ситуация, как с квантовой механикой до 1925 г. Существует множество прекрасных частных теорий, но еще нет единой теории, охватывающей все стороны картины мира. Однако нельзя сказать, что эта проблема не волнует физиков. Об этом когда-то мечтал и Эйнштейн, но первый настоящий шаг был сделан в 1964 г. Янгом, Миллсом, Утиямой и Сакураей [2], где учитывались внутренние симметрии объекта локального характера. Это дало возможность внести в теорию новый физический объект — калибровочное поле, подобно электромагнитному, взаимодействие с которым обеспечивало инвариантность теории относительно локальной группы симметрии. Этот подход оказался глубоким физическим принципом, позволяющим вводить взаимодействие чисто геометрически, определяя его форму в соответствии со свойствами симметрии теории. Правда, начало было заложено еще Эйнштейном в ОТО в виде локальной инвариантности и развил его Вейль для электромагнитного поля.

Однако в этом подходе еще не хватало одного механизма, приводящего в движение всю систему фундаментальных взаимодействий. Таким механизмом оказалось спонтанное образование массы (спонтанное нарушение симметрии), предложенное Хиггсом [3] и работами Тофта [4], Тейлора [5] и Славнова [6]. Результаты этих работ позволили Вайнбергу, Саламу [7, 8] и Глэшоу объединить электромагнитное и слабое взаимодействия в электрослабое, а другим в эту модель включить и сильные взаимодействия.

Преимущество этого геометрического принципа в том, что он определяет форму почти всех взаимодействий, независимо от их физической природы и допускает чисто геометрическую интерпретацию. Иными словами, смысл последних в том, что геометрия и геометрические идеи приобретают динамический характер, и четырехмерное пространство–время делается лишь частным случаем возможных динамических геометрий. Возникшая в результате применения этого принципа единая теория всех взаимодействий оказывается геометрической теорией, как ОТО. Описание движения частиц в терминах геометрических понятий, таких как коэффициенты связности, тензоры кривизны расслоенного пространства, делает их движения свободными, т.е. устраняет разделение движений на инерциальные и неинерциальные, и, главное, позволяет проверить геометрию экспериментально. Например, с помощью метода соединения множества плоскостей с коэффициентами связности можно получить сферу, а плоского пространства с гравитационным полем — кривизну. Это позволяет отождествить коэффициенты связности (геометрическое понятие) с гравитацией (физическое понятие), т.е. определяет геометрию гравитации. Об этом подходе Н.П.Коноплева и В.И.Попов пишут: «... Можно считать, что пространство плоское и все тела подвергаются взаимодействию универсального всепроникающего поля или что никакого поля нет, но пространство кривое. В таком случае вопрос о геометрии пространства в целом оказывается эквивалентным вопросу о поведении физических полей на произвольно больших расстояниях от источника. Свойства симметрии пространства становятся свойствами симметрии взаимодействий. Топология пространства в целом также отражается в свойствах взаимодействий. Так смыкаются геометрия и физика» [9]. Далее авторы пишут, что «... и другие виды взаимодействий, а именно те, которые осуществляются калибровочными полями, также допускают чисто геометрическую интерпретацию. Только в этом случае локальными становятся внутренние симметрии элементарных частиц».

Нами упомянуто вкратце о нарушении симметрии. Остановимся более подробно на нем, так как оно стало поворотным пунктом в теории объединения фундаментальных взаимодействий.

Так как всякое нарушение связано с воздействием на систему некоторой силы, и этот процесс позволяет наблюдать его, то эта наблюдаемость говорит о том, что в процессе происходит переход микроскопической симметрии в макроскопическую, т.е. перестройка геометрической структуры системы. Также этот процесс позволяет определить природу перестраивающей силы. Этот метод был заложен еще при построении теории сверхпроводимости, сверхтекучести и теории лазеров. И благодаря им мы воочию увидели эту перестройку, т.е. переход микроскопических процессов в макроскопические.

В этих процессах роль «силы» играет понятие коэффициентов связности расслоенного пространства, а траектории — кривая на плоскости. Расслоенное пространство получается из обычного пространства–времени, если предположить, что его точки имеют внутреннюю структуру, действующую внутри слоев (внутренних пространств). Примером обычного и расслоенного пространств может служить орбитальное и собственное вращение электрона в атоме. Если орбитальное вращение электрона описывается обычным пространством–временем, то собственное вращение — расслоен-

ным пространством. Отсюда видно, что они не могут быть отождествлены между собой. Это отражает независимость квантовых чисел, соответствующих внутренним симметриям и определяющих, например, правила запрета в реакциях элементарных частиц от их пространственно-временных характеристик. Геометрия расслоенного пространства обобщает риманову геометрию и включает ее как свой частный случай.

Можно заметить, что возможен переход от плоского к искривленному пространству и наоборот. Это осуществляется через коэффициенты связности, например, Ричча или Кристоффеля. Эти коэффициенты могут быть геометрически интерпретированы как вектор-потенциал калибровочных полей, траектории частиц, как свободные. А это позволяет избавиться от понятия силы (как физического понятия). Расстояние между траекториями двух произвольных частиц или тел, называемое геодезическим отклонением, пропорционально тензору кривизны пространства–времени. Через такое определение можно интерпретировать и тензоры кривизны.

Следовательно, в основе, как мы отметили, каждой физической теории лежат постулат о геометрических свойствах пространства–времени и геометрические идеи, причем они находят свое выражение в принципе относительности теории. «Законы физики не могут быть выражены без помощи геометрии, хотя геометрия, взятая сама по себе, не соответствует никаким опытам, никакой опытной науке», — писал Кант [10]. Таким образом, геометрические идеи в физической теории отражают выбор средств, метод описания и форму наглядности, с помощью которых эта теория может быть раскрыта и проверена.

Значит, цель каждого геометрического подхода к взаимодействиям состоит в отыскании такого пространства, в котором изучаемые поля стали бы стандартными геометрическими объектами. Это позволяет применить хорошо разработанные методы геометрии, алгебры и топологии для изучения свойств решений классических уравнений движения и поля.

Таким образом, геометрические описания взаимодействий позволяют аксиоматизировать физику, естественным образом объединяя внутренние и пространственно-временные симметрии, выдвигая критерии выбора Лагранжианов взаимодействий и обосновывая алгебраические свойства полей. Кроме того, теория калибровочных полей нашла общий подход к объединению не только полей движения, но и таких направлений в теоретической физике, как дисперсионные соотношения, высшие симметрии, кварки, партоны, алгебра токов, черные дыры, очарованные частицы, струны, солитоны, мембраны и т.д.

Вошедшие в последние 50 лет в теоретическую физику геометрические идеи; суперсимметрия и их локальное обобщение — супергравитация, идея возможности дополнительных измерений пространства–времени и определения его размерности из требования непротиворечивости выбираемой квантово-полевой модели, представление о суперструнах и супермембранах как фундаментальных физических объектах совершают сейчас такие открытия, которые не представлялись раньше. Они дали новый толчок в построении современной картины мира.

Таким образом, мы продемонстрировали на примерах и предложенных Фейнманом в КТП принципах применение геометрических методов и идей в современной теоретической физике. Здесь показана общая черта, скелет этого метода, принципы на примере теории геометрических идей. При этом нами использованы методы Эйнштейна, Вейля, Миллса, Янга, Утиямы, Сакурая, Хиггса, Тейлора, Славнова и других.

Теперь рассмотрим теорию суперструн. Мы не будем останавливаться на теории Вайнберга-Глэшоу-Салама о теории электрослабого взаимодействия, поскольку, во-первых, доказано, что она является физической теорией, полученной применением геометрии и алгебры, во-вторых, она является частным случаем теории суперструн и, в-третьих, она хорошо изложена во многих учебниках и монографиях на языке геометрических идей.

Теория суперструн — это современный вариант единой теории фундаментальных (электромагнитных, сильных, слабых и гравитационных) взаимодействий. Она затрагивает самые глубокие вопросы мировоззрения и является наиболее разработанной современной попыткой ответа на вопросы о природе фундаментальных взаимодействий. Теория суперструн основана на представлении о пространстве–времени как гладком вещественном многообразии, где много геометрических тонкостей.

В семидесятых годах так называемые дуальные модели сильных взаимодействий предсказывали большое количество безмассовых частиц, ни одна из которых не существует в мире адронов. И этот недостаток не давал возможности построить разумную объединяющую гравитацию и материю теории. Задача было в том, как избавиться от этого недостатка. Выход пришел неожиданно. В 1974 г.

Весс [11] и Зумино [12] выдвинули идею пространственно-временной симметрии как четырехмерное обобщение симметрии двумерной поверхности в струнной модели Рамона-Неве-Шварца [13]. Она оказалась удачным понятием в перенормируемых лагранжевых теориях поля.

В лекции, прочитанной на Восьмом международном семинаре по теоретической физике (Саламанка, Испания, 13–14 июня 1977 г.), один из авторов этой теории Весс говорил, что «построение моделей супергравитации продолжает оставаться искусством и в то же время тяжелой работой. В этих лекциях я буду придерживаться геометрического подхода, поскольку он мне кажется самым последовательным...» [11]. Он показал образцы построения суперсимметричной теории методом геометрических идей.

Таким образом, появилась на свет новая геометрическая идея — теория суперструн, в некоторой степени объединяющая все фундаментальные взаимодействия, включая и гравитацию. Однако это было всего лишь первым приближением к решению задач о фундаментальных взаимодействиях. Рассмотрим эту теорию с новой точки зрения, с особым подходом, т.е. с точки зрения появления темной материи и темной энергии.

Сначала рассмотрим сущность суперструнной теории. Струна — однородный объект, кривая. Она, распространяясь в пространстве и времени, замечает мировую поверхность, являющуюся обобщением мировой линии точечной частицы. Мировая поверхность описывается функцией  $\chi(\sigma, \tau)$  — положением струны при данных значениях  $\sigma$  и  $\tau$ , или их объединенным вектором  $\sigma^\alpha = d\sigma d\tau$ . Если еще ввести новую переменную  $n_{\alpha\beta}$ , которая является матричным тензором мировой поверхности струны, то формула для площади струны в пространстве Минковского будет следующим выражением:

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma h^{1/2} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \chi^\mu \partial_\beta \chi^\nu, \quad (1)$$

где  $T$  — натяжение струны;  $h^{1/2}$  — квадратный корень из абсолютного значения определителя матрицы  $h_{\alpha\beta}$ , а  $h^{\alpha\beta}$  — обратная  $h_{\alpha\beta}$ .

Уравнение (1) описывает распространение струны в пространстве Минковского любой размерности. Стандартной и удобной параметризацией мировой поверхности является  $h_{\alpha\beta} e^\rho = \eta_{\alpha\beta}$  — матрица, где  $e^\rho$  — неизвестный множитель, т.е. конформная калибровка. Если представить, что  $h^{1/2} \sim e^\rho$ , а  $h_{\alpha\beta} \sim e^{-\rho}$ , то площадь определяется уравнением

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \chi^\mu \partial_\beta \chi^\nu,$$

и оно отвечает следующим условиям:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \chi^\mu = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0. \quad (2)$$

(2) — уравнение связи.

Поскольку для (1+1)-мерной КТП тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \cdot \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}},$$

то  $T_{\alpha\beta} = 0$ . Тогда  $T_{\alpha\beta} |\varphi\rangle = 0$ , подобно уравнению Шредингера для струны, и функция действия примет вид:

$$S = \int d^D x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma_\mu D^\mu \psi \right), \quad (3)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор напряженности поля для неабелева вектор-потенциала  $A_\mu$ ;  $D$  — символ янг-милловской ковариантной производной;  $\Gamma_\mu$  — матрица Дирака.

Присутствие матрицы Дирака в уравнении (3) подсказывает, что в действии, кроме гравитации, присутствует и антигравитация, антигравитационное поле, т.е. имеется темная энергия, которая рас-

ширяет Вселенную отталкивающим действием. Она проявляет себя в определенных условиях, когда расстояние между взаимодействующей материей достигает размера нескольких световых лет для Вселенной и зависит от гравитационной массы, когда другие взаимодействия исчерпали себя.

Проявление этого эффекта подобно соотношению между нерелятивистским и релятивистским, электрическим и магнитным. Гравитация и антигравитация — это единое свойство материи. Например, совпадение форм законов Кулона и всемирного тяготения — это не случайность.

Все это говорит о том, что единая теория природы находится в стадии становления и развития, хотя мы утверждаем, что теория суперструн является всеохватывающей теорией. Она, нам кажется, станет действительно таковой в том случае, когда приобретет глобальную геометрическую интерпретацию, найдет свою геометрию, как ОТО, как другие разделы теоретической физики для своего объекта. Суперструна, супермембрана и другие геометрические объекты пока остаются всего лишь геометрическими идеями, они еще не превратились в метод описания природы. Кроме того, в этих теориях имеется еще множество недостатков. Нам известно, что даже одно опровержение, несоответствие с опытом, может вычеркнуть любую красивую теорию, могут оказаться за бортом любые прекрасные идеи.

Мы далеки от мысли о том, что физику надо излагать только языком геометрии, это увело бы физику от физической реальности. Мы за то, что найти ту реальную середину, чтобы не сделать теоретическую физику чисто математической или чисто физической теорией. Опыт показывает, что и то и другое не раскрывает всю природу физических явлений по отдельности. Когда-то Лагранж писал, что «пока алгебра и геометрия шли раздельными путями, их развитие было медленным, а приложения ограниченными. Когда же эти науки соединились, они стали черпать друг из друга новую жизненную силу и быстрыми шагами устремились к совершенству» [14]. И физика и геометрия должны раскрывать красоту природы совместно.

Надо отметить, что в последние годы проведено множество исследований, относящихся к геометрии пространства–времени в других направлениях. К ним относится геометродинамика и сверхпространство Уиллера, теория пространственного и вакуумного коллапса и черных дыр, решение уравнений Эйнштейна, переменная топология, сверхпространства Гротендика и другие с переменной метрикой римановых многообразий.

## References

1. *Feynman R.* Quantum mechanics. — M.: Mir, 1978. — 524 p.
2. *Yang I.N., Mills R.A.* Elementary particles and compensating fields. — M.: Mir, 1964. — 299 p.
3. *Higgs P.W.* Broken symmetries and the masses of gauge bosons // *Phys. Rev. Lett.*, 1964. — Vol. 12. — P. 132.
4. *t'Hoofst G.* Renormalization of Massless Yang-Mills Fields // *Nucl. Phys.* — 1971. — Vol. 1335. — P. 173–199.
5. *Taylor J.C.* Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field // *Nucl. Phys. B.* — 1971. — Vol. 33. — P. 436–444.
6. *Slavnov A.A.* Ward's identities in Yang and Mills theory // *Theoretical and mathematical physics.* — 1972. — T. 10. — P. 99–112.
7. *Weinberg S.A.* Model of Leptons // *Phys. Rev. Lett.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1264–1266.
8. *Salam A.* Proc. 8-th Nobel Symposium., Stockholm. — 1965. — P. 367.
9. *Konopleva N.P., Popov V.I.* Gauge fields. — M.: Atomizdat, 1986. — 240 p.
10. *Kant I.* Critique of Pure Reason. Coll. Cit. — Vol. 3. — M.: Mysl, 1964. — 799 p.
11. *Wess J., Zumino B.* Superspace formulation of supergravity // *Phys. Lett. B.* — 1977. — Vol. 66. — P. 361.
12. *Zumino B.* Model Estimates and Results // *Proc 17-th Intern. Conf. on High Energy Physics.* — 1974. — P. 1243–1250.
13. *Ramond P. and Schwarz J.* Classification of dual model gauge algebras // *Phys. Lett. B.* — 1976. — Vol. 64. — P. 75–77.
14. *Lagrange J.L.* Analytical Dynamics. — L.: GITTL, 1950. — Vol. 1, 2. — 594 p.