УДК 521.1

М.Д.Минглибаев[1], Б.Т.Шукиргалиев[2]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби;*
[2]*Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы (E-mail: bekdaulet@bk.ru)*

Уравнения вековых возмущений в обобщенной задаче двух тел с переменными массами

На основе уравнений Мещерского исследована обобщенная задача двух тел с переменными массами в случае, когда массы изменяются неизотропно в различных темпах. Предположены известными скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц в абсолютной или относительной системе координат. Показано, что уравнения движения имеют одинаковый вид. В общем случае получены уравнения, определяющие вековые возмущения в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиэллипсу.

Ключевые слова: уравнение Мещерского, приведенная масса, относительные скорости, отделяющиеся частицы, оскулирующий элемент, Лагранж.

Реальные космические тела по существу нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структуры распределения массы внутри тел [1–7]. Особенно интенсивно процессы диссипации и переноса массы, изменения формы и размеров компонент происходят в тесных двойных системах [6, 8]. Относительно простыми небесно-механическими моделями нестационарных двойных гравитирующих систем являются различные постановки задач двух тел с переменными массами [9–17]. Как показано в работе Л.Г.Лукьянова [6], на сегодняшний день нет ни одной удовлетворительной механической модели, адекватно описывающей физические процессы, происходящие в тесных двойных системах. В настоящей работе развивается небесно-механическая модель нестационарных двойных систем — обобщенная задача двух тел с переменными массами, когда массы тел меняются неизотропно, произвольно в различных темпах. Также предполагаются произвольными абсолютные или относительные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц.

Тела предполагаются как материальные точки. Известно, что ньютоновская внешняя гравитация шаровидных тел со сферическим распределением переменной плотности и переменного радиуса совпадает с ньютоновским притяжением материальной точки переменной массы, равной массе шаровидного тела, расположенной в его центре масс. Поэтому под точечными телами будем также подразумевать шаровидные тела с указанными выше свойствами. Реактивные силы являются поверхностными. В рассматриваемой постановке тела являются материальными точками, поэтому будем считать, что реактивные силы приложены к точкам, которые расположены в центре масс тел.

Уравнение И.В.Мещерского [18] в абсолютной системе координат для двух точечных тел с переменными массами $m_1=m_1(t)$, $m_2=m_2(t)$, находящихся соответственно в точках P_1 и P_2, когда массы меняются неизотропно, в различных темпах, можно написать в виде

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -f\frac{m_1m_2}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21} - \dot{m}_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{m}_1\mathbf{u}_1;$$
$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -f\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} - \dot{m}_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{m}_2\mathbf{u}_2. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}_{21}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ — абсолютные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц; f — постоянная тяготения.

Обозначим $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$. Тогда из уравнения (1) можно получить

$$\ddot{\mathbf{r}} = -f\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{\dot{m}_1}{m_1}\dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{u}_1. \qquad (2)$$

Если в рассматриваемой задаче известны $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — абсолютные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц, тогда, как это было указано Л.Г.Лукьяновым [13], преобразуя уравнение (2), можно написать уравнение относительного движения в относительной системе координат P_1XYZ с началом в точке P_1 с массой m_1

$$\ddot{\mathbf{r}} = -f\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r} - \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}m_2 + \frac{\dot{m}_2}{m_2}m_1\right)\frac{1}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{a}_0}{m_1+m_2} + \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{W}}{m_1+m_2} + \frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{u}_1, \tag{3}$$

причем

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{W} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{const}, \qquad \mathbf{W} = \int_{t_0}^{t}(\dot{m}_1\mathbf{u}_1 + \dot{m}_2\mathbf{u}_2)dt.$$

Мы перепишем уравнение (3) в другой форме. Обозначим приведенную массу $\sigma = m_1m_2/(m_1+m_2)$. И учитывая, что

$$\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}m_2 + \frac{\dot{m}_2}{m_2}m_1\right)\frac{1}{m_1+m_2} = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}, \tag{4}$$

напишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -f\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_1. \tag{5}$$

Здесь через F_1 обозначено

$$\mathbf{F}_1 = \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{a}_0}{m_1+m_2} + \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{W}}{m_1+m_2} + \frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{u}_1. \tag{6}$$

Теперь, в отличие от работы [13], рассмотрим случай, когда известны $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — относительные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц (по отношению к точке P_1) с массой m_1:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{u}_1, \;\; \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{u}_2, \tag{7}$$

в относительной системе координат P_1XYZ с началом в точке P_1. Тогда, учитывая (6), из уравнений (2) получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = -f\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_2, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{v}_2. \tag{9}$$

Объединяя уравнения (5) и (8), можно написать

$$\ddot{\mathbf{r}} = -f\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\nu}}{\nu}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}, \tag{10}$$

где $\nu = \nu(t)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ считаются известными функциями времени.

Уравнение (9) является основным уравнением относительного движения в рассматриваемой задаче.

В общем случае уравнение движения (9) может быть исследовано методами теорий возмущений [1,4,7,17]. Рассмотрим уравнение движения в оскулирующих элементах a, e, ω, Ω, i, M апериодического движения по квазиэллипсу

$$\ddot{\mathbf{r}} = -fm\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{\mathbf{r}} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\mathbf{r} + grad_{\mathbf{r}}R. \tag{11}$$

Сравнивая выражения (9) и (10), находим

$$m = m_1 + m_2 = m(t); \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right) = -\frac{\dot{\nu}}{\nu}; \tag{13}$$

$$\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\mathbf{r} + grad_{\mathbf{r}}R = \mathbf{F}. \tag{14}$$

Соответствующие уравнения возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа имеют вид [7, 17]

$$\begin{aligned}
&\dot{a} = \frac{2}{na}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial M};\\
&\dot{e} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega};\\
&\frac{di}{dt} = \frac{\mathrm{ctg}\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} - \frac{\mathrm{cosec}\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Omega};\\
&\dot{\Omega} = \frac{\mathrm{cosec}\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial i};\\
&\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{\mathrm{ctg}\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial i};\\
&\dot{M} = \left(\frac{m}{m_0\gamma^3}\right)^{1/2} n - \frac{2}{na}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial e},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\tilde{R} = -\left(\frac{m_0}{m\gamma}\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\frac{1}{2}r^2 + F_x x + F_y y + F_z z\right\}, \tag{16}$$

причем

$$\begin{aligned}
&x = \gamma\rho\left[\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i\right];\\
&y = \gamma\rho\left[\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i\right];\\
&z = \gamma\rho\left[\sin u\sin i\right];\\
&r = \gamma\rho;\\
&u = \omega + \vartheta;\\
&\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = -2\frac{\dot{\nu}}{\nu} - \frac{\dot{m}}{m};\\
&m_0 = m(t_0);\\
&n = \frac{\sqrt{fm_0}}{a^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для получения разложения возмущающей функции (12) через орбитальные элементы воспользуемся известными формулами [7]

$$r^2 = \gamma^2\rho^2 = \gamma^2 a^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^2; \tag{18}$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right)\cos M - \frac{e^2}{2}\cos 2M - \frac{e^3}{4}\cos 3M + \ldots; \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
x &= \gamma\rho\left[\cos(\omega+\vartheta)\cos\Omega - \sin(\omega+\vartheta)\sin\Omega\cos i\right] =\\
&= \gamma\rho\left[(\cos\omega\cos\vartheta - \sin\omega\sin\vartheta)\cos\Omega - (\sin\omega\cos\vartheta + \cos\omega\sin\vartheta)\sin\Omega\cos i\right] =\\
&= \gamma a\left[\frac{\rho}{a}\cos\vartheta(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i) - \frac{\rho}{a}\sin\vartheta(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i)\right];
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
y &= \gamma\rho\left[\cos(\omega+\vartheta)\sin\Omega - \sin(\omega+\vartheta)\cos\Omega\cos i\right] =\\
&= \gamma\rho\left[(\cos\omega\cos\vartheta - \sin\omega\sin\vartheta)\sin\Omega - (\sin\omega\cos\vartheta + \cos\omega\sin\vartheta)\cos\Omega\cos i\right] =\\
&= \gamma a\left[\frac{\rho}{a}\cos\vartheta(\cos\omega\sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega\cos i) - \frac{\rho}{a}\sin\vartheta(\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\right];
\end{aligned} \tag{21}$$

$$z = \gamma\rho\left[\sin(\omega+\vartheta)\sin i\right] = \gamma\rho\left[(\sin\omega\cos\vartheta+\cos\omega\sin\vartheta)\sin i\right] =$$
$$= \gamma a\left[\frac{\rho}{a}\cos\vartheta(\sin\omega\sin i) - \frac{\rho}{a}\sin\vartheta(\cos\omega\sin i)\right]; \qquad (22)$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)\cos\vartheta = -\frac{3}{2}e + \left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos M + \frac{e^3}{3}\cos 4M + \ldots \qquad (23)$$

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)\sin\vartheta = \left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin M + \left(\frac{e}{2}-\frac{5}{12}e^3\right)\sin 2M + \ldots \qquad (24)$$

Если в последних формулах ограничимся только вековой частью, тогда имеем

$$r^2 \approx \gamma^2 a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right); \qquad (25)$$

$$x \approx -\frac{3}{2}\gamma ae\left(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right);$$
$$y \approx -\frac{3}{2}\gamma ae\left(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right); \qquad (26)$$
$$z \approx -\frac{3}{2}\gamma ae\sin\omega\sin i.$$

Таким образом, вековая часть возмущающей функции имеет вид

$$\tilde{R}_{sec} = Aa^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) + F_x Bae\left(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right) +$$
$$+F_y Bae\left(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right) + F_z Bae\sin\omega\sin i. \qquad (27)$$

Здесь

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/2}\left[\frac{\ddot\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right]\gamma^{3/2}, \quad B = -\frac{3}{2}\left(\frac{m_0\gamma}{m}\right)^{1/2}. \qquad (28)$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что анализ вековых возмущений сводится к исследованию следующей системы уравнений:

$$\dot a = 0;$$
$$\dot e = \frac{B\sqrt{1-e^2}}{na}[F_x\left(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i\right) + F_y\left(\sin\omega\sin\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i\right) - F_z\cos\omega\sin i];$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{Be\cos\omega}{na\sqrt{1-e^2}}\left(F_x\sin\Omega\sin i - F_y\cos\Omega\sin i + F_z\cos i\right);$$
$$\dot\Omega = \frac{Be\sin\omega}{na\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(F_x\sin\Omega\sin i - F_y\cos\Omega\sin i + F_z\cos i\right); \qquad (29)$$
$$\dot\omega = \frac{3A\sqrt{1-e^2}}{n} + \frac{Be}{na\sqrt{1-e^2}}(F_x\left[\frac{1}{e^2}\left(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right) - \cos\omega\cos\Omega\right] +$$
$$+F_y\left[\frac{1}{e^2}\left(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right) - \cos\omega\sin\Omega\right] + F_z\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{\sin^2 i}\right)\sin\omega\sin i);$$
$$\dot M = \left(\frac{m}{m_0\gamma^3}\right)^{1/2} n - \frac{A}{n}\left(7+3e^2\right) - \frac{B}{nae}\left(2e^2 + \frac{1-e^2}{ae}\right)[F_x\left(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right) +$$
$$+F_y\left(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right) + F_z\sin i\sin\omega].$$

Полученные уравнения (13)–(15) дают возможность определить вековые возмущения в рассматриваемой задаче при произвольных законах изменения масс рассматриваемых тел и скоростей отделяющихся (присоединяющихся) частиц. Приближенные аналитические решения этих уравнений могут быть получены по методу Пикара.

По-видимому, при вычислении высших приближений предпочтительны канонические уравнения вековых возмущений [7]. В дальнейшем предполагается на базе полученных уравнений вековых возмущений анализировать динамическую эволюцию нестационарных двойных систем.

Reference

1 *Omarov T.B.* Metagalaxy Gravitating Systems Dynamics. — Alma-Ata: Science, 1975. — P. 144.

2 *Hadjidemetriou J.D.* Secular variation of mass and the evolution of binary systems // Advances in Astronomy and Astrophysics. — N-Y, L., Acad. Press., 1967. — Vol. 5. — P. 131–188.

3 *Masevich A.G., Tutkov A.V.* Stars Evolution: Theory and Observations. — M.: Science, 1988. — P. 280.

4 *Omarov T.B*. (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. — New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002.

5 *Bekov A.A., Omarov T.B.* The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astronomical and Astrophysical Transactions. — 2003. — Vol. 22. — P. 145–153.

6 *Lukyanov L.G.* Dynamic evolution of star orbits in closed duplex systems with conservative mass exchange // Astron. Rep. — M.: Science, 2008. — Vol. 85. — P. 8.

7 *Minglibayev M.D.* Dynamics of non-stationary gravitating systems. — Almaty: Kazakh University, 2009.

8 *Pustylnik I.B.* Closed duplex systems: effects and interactions // Science and Machinery Summary. Ser. Astronomy. — M.: VINITI, 1989. — Vol. 36. — P. 108.

9 *Lapin A.S.* Problem of two bodies with variable masses // Scientific Notes of LSU, Pure sciences series. — L., 1944. — Rev. 13. — P. 3–55.

10 *Gelfgat B.Ye*. Consolidation of problem of two bodies with variable masses and its rigorous solutions // Tsiolkovskiy Third Reading. Cosmic Flight Mechanics Section. — Kaluga, 1968. — P. 86–101.

11 *Kuryshev V.I., Perov N.I.* On the Equations of Motion of Binary Systems with Variable Mass // Astron. Rep. — 1981. — Vol. 58. — P. 886 (1981).

12 *Berkovic L.M.* Gylden-Mescerskii problem // Celest. Mech. — 1981. — Vol. 24. — № 4.— P. 407–429.

13 *Lukyanov L.G.* On motion equations for a problem of two bodies with variable masses // MSU Messenger. Ser. 3. Phys., astron. — 1983. — Vol. 24. — № 1. — P. 62–66.

14 *Razbitnaya E.P.* Problem of two bodies with variable masses: classification of different cases // Astron. Rep. — 1985. — Vol. 62. — Rev. 6. — P. 1175–1181.

15 *Polyakhova E.N.* Celestial mechanical aspects of problems of two and three bodies with variable masses // Scientific Notes of LSU, Pure sciences series. — 1989. — Vol. 42. 424. — Rev. 64. — P. 104–143.

16 *Polyakhova E.N.* Celestial mechanical aspects of problem of two bodies with variable masses: modern situation // Astron. Rep. — Rev. 2. — 1994. — Vol. 71. — P. 321.

17 *Minglibayev M.D., Turdaliev B.J.* Spatial motions in Lapin's problem // Astron. Rep. — M.: Science, 1994. — Vol. 71. 2.

18 *Meschersky I.V.* Work on mechanics of bodies with variable mass. — M.: GITTL, 1949. — P. 276.

М.Д.Минглибаев, Б.Т.Шүкірғалиев

Айнымалы массалары бар жалпыланған екі дене есебіндегі ғасырлық қобалжу теңдеулері

Массалары изотропты емес және әр түрлі заңдылықпен өзгеретін айнымалы массалы екі дене есебі Мещерский теңдеуі негізінде зерттелген. Қосылып (ажырап) жатқан бөлшектер жылдамдығы абсолют немесе салыстырмалы координата жүйелерінде белгілі деп есептеледі. Екі жағдайда да қозғалыс теңдеуінің түрі бірдей екені көрсетілген. Жалпы жағдайда квазиэллипс бойымен апериодты қозғалыстың оскуляциялаушы элементтерінде ғасырлық ұйытқуды анықтайтын теңдеулер алынған.

M.D.Minglibaev, B.T.Shukirgaliev

Equations of secular perturbations in the generalized two-body problem with variable mass

On the basis of equations Meshchersky the generalized problem of two bodies with variable masses when the masses are changed anisotropically in different tempos is studied. Speeds of separating (joining) particles in absolute or relative coordinate system are considered to be known. It is demonstrated that motion equations have identical look. In general, the equations, determining secular perturbations in osculating elements of aperiodic quasi elliptic motion, are received.