

## References

- 1 Dynkin A. *Izvestiya*. 2010, 13 of March.
- 2 Sukharev O. *Economist*, Moscow, 2010, 3, p. 20.
- 3 *Data of the statistics agency of the Republic of Kazakhstan for 2008–2010*. [ER]. Access mode: www.stat.kz
- 4 *Statement by the President of Nursultan Nazarbaev during the video conference, dedicated to the day of industrialization July 4, 2012 year*. [ER]. Access mode: www.akorda.kz
- 5 Maulenova S.Zh. *Conditions and factors of economic development of Kazakhstan / Kazakhstan / towards a new model of development: trends, imperatives of growth and potential*, p. 1, Almaty: Kitap, 2012, 280 p.
- 6 Kuzevanova I.Yu, Poroshin Yu.B. *Innovation*, 2010, 4, p. 85–91.

ӘОЖ 517.956

Н.Т.Орумбаева

*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: Orumbayevan@mail.ru)***Гиперболалық теңдеулер жүйесінің периодты шешімдері**

Мақала аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептерді зерттеуге арналған. Параметрлеу әдісі негізінде гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің жуық шешімдерін табатын конструктивті алгоритмдер ұсынылған. Есептің алғашқы берілгендері бойынша ұсынылған алгоритмдердің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары алынған.

*Кілт сөздер:* гиперболалық теңдеулер жүйесі, алгоритм, шеттік есеп, параметрлеу әдісі.

Қандай да бір уақыт аралығында қайталанып отыратын құбылыстар мен процестерді математикалық модельдеу гиперболалық түрдегі периодты шеттік есептерді зерттеуге мұқтаж етеді. Аралас туындысы бар дербес туындылы гиперболалық теңдеулер үшін периодты шеттік есептерді зерттеу 60-шы жылдардан Чезаридің жұмыстарынан бастау алады. Осындай шеттік есептердің шешімділік мәселелерімен әрі қарай А.К. Азиз, С.В. Жестков, А.М. Самойленко, Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома, М.И. Громьяк, Б.И. Пташник, Т.И. Кигурадзе және тағы басқалар айналысқан. Дегенмен, программалаудың қолданбалы есептерде кең ауқымда қолданылуы құрылған әдістерге жаңа талаптар қояды. Осыған орай ұсынылып отырған гиперболалық теңдеулер үшін периодты шеттік есептің жуық шешімін табудың қос параметрлі алгоритмдер әулеті осы талаптарды негізге алады.

$\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында сызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік (1)–(3) есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t)u + f(x, t); \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

мұнда  $A(x, t), C(x, t)$  —  $n$ -өлшемді матрицалары және  $f(x, t)$   $n$ -вектор функциясы  $\bar{\Omega}$  облысында үзіліссіз,  $\psi(t)$   $n$ -вектор функциясы  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады және  $\psi(0) = \psi(T)$  шартын қанағаттандырады. Сондай-ақ  $u(x, t), A(x, t)$  нормалары мына түрде анықталады:  $\|u(x, t)\| = \max_{i=1, n} |u_i(x, t)|$ ;  $\|A(x, t)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x, t)|$ .  $C(\bar{\Omega}, R^n)$  —  $\bar{\Omega}$ -да үзіліссіз және нормасы келесі  $\|u\|_0 = \max_{(x, t) \in \bar{\Omega}} \|u(x, t)\|$  түрде анықталатындай  $u: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  функциялар кеңістігі болсын.

Егер де барлық  $(x, t) \in \overline{\Omega}$  үшін  $u(x, t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$  функциясының  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$  дербес туындылары бар болып, (1) жүйені және (2), (3) шарттарын қанағаттандыратын болса, онда бұл функция берілген есептің шешімі болады.

(1)–(3) есебін шешу үшін жаңа белгісіз  $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  функциясын  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  енгіземіз. Сонда берілген есеп келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + C(x, t)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega; \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega]; \quad (5)$$

$$u(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

(4)–(6) есебінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісін қолданамыз [2].

$h > 0: Nh = T$  — қадамы бойынша  $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Сонда

$\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $v_r(x, t), u_r(x, t)$  арқылы, сәйкесінше,  $v(x, t), u(x, t)$  функцияларының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$  облысындағы мәндерін белгілейміз. Бұл жағдайда, (4)–(6) есебі келесі шеттік есепке эквивалентті болады:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x, t)v_r + C(x, t)u_r(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r; \quad (7)$$

$$v_1(x, 0) - \lim_{t \rightarrow T-0} v_N(x, t) = 0, \quad x \in [0, \omega]; \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} v_s(x, t) = v_{s+1}(x, sh), \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (9)$$

$$u_r(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v_r(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}, \quad (10)$$

мұндағы (9) —  $v(x, t)$  функциясын бөлгендегі ішкі түзулерін түйістіру шарты.

$\lambda_r(x) = v_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп,  $\tilde{v}_r(x, t) = v_r(x, t) - \lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$  алмастыруын жасаймыз. Сонда  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциясы бар эквивалентті (11)–(15) шеттік есепті алатын боламыз:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x, t)\tilde{v}_r + A(x, t)\lambda_r(x) + C(x, t)u_r(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r; \quad (11)$$

$$\tilde{v}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r = \overline{1, N}; \quad (12)$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_N(x, t) = 0, \quad x \in [0, \omega]; \quad (13)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{v}_s(x, t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (14)$$

$$u_r(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Бекітілген  $\lambda_r(x), u_r(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  жағдайында (11)–(12) есебі қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің үйірі болып табылады және келесі интегралдық теңдеуге эквивалентті:

$$\tilde{v}_r(x, t) = \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau) \tilde{v}_r(x, \tau) d\tau + \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau) d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^t [C(x, \tau)u_r(x, \tau) + f(x, \tau)] d\tau. \quad (16)$$

$\tilde{v}_r(x, \tau)$  өрнегінің орнына соңғы теңдеудің оң жағын қойып және осы процесті  $v(v=1, 2, \dots)$  рет қайталап, (17)-ші теңдеуді аламыз:

$$\tilde{v}_r(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r(x) + F_{vr}(x, t, u_r) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}_r), \quad r = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Соңғы өрнектен  $t \rightarrow rh - 0$  шекке көшіп және осы шектерді (13), (14) теңдеулеріне қойып, белгісіз  $\lambda_r(x), r = \overline{1, N}$  функциялары үшін келесі функционалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q_v(x, h)\lambda(x) = -F_v(x, h, u) - G_v(x, h, \tilde{v}), \quad (18)$$

мұндағы

$$Q_v(x, h) = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & -[I + D_{vN}(x, Nh)] \\ I + D_{v1}(x, h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{v2}(x, 2h) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I + D_{v, N-1}(x, (N-1)h) & -I \end{bmatrix};$$

$$F_v(x, h, u) = (-F_{vN}(x, Nh, u_N), F_{v1}(x, h, u_1), \dots, F_{v, N-1}(x, (N-1)h, u_{N-1}));$$

$$G_v(x, h, \tilde{v}) = (-G_{vN}(x, Nh, \tilde{v}_N), G_{v1}(x, h, \tilde{v}_1), \dots, G_{v, N-1}(x, (N-1)h, \tilde{v}_{N-1})).$$

Сонымен,  $\{\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t), u_r(x, t)\}, r = \overline{1, N}$  жүйесін табу үшін (18), (17) және (15) теңдеулерінен құралған тұйық жүйені алдық.

Кез келген  $x \in [0, \omega]$  үшін  $Q_v(x, h)$  матрицасының кері матрицасы бар деп жорып және  $\tilde{v}_r(x, t) = 0, u_r(x, t) = \psi(t)$  деп алып, (18) теңдеуден  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))'$  табамыз:

$$\lambda^{(0)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, \psi) + G_v(x, h, 0)\}.$$

$\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$  болғанда, (17) теңдеуін қолданып,  $\{\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$  анықтаймыз:

$$\tilde{v}_r^{(0)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(0)}(x) + F_{vr}(x, t, \psi) + G_{vr}(x, t, 0).$$

$u_r^{(0)}(x, t), r = \overline{1, N}$  функциясы (15) теңдеуден табылады:

$$u_r^{(0)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega_r.$$

(11)–(15) есебінің алғашқы жуықтауы ретінде  $(\lambda_r^{(0)}(x), \tilde{v}_r^{(0)}(x, t), u_r^{(0)}(x, t)), r = \overline{1, N}$ , жүйесін алып, кейінгі жуықтауларын келесі алгоритм бойынша табамыз:

**1-қадам.** 1-қадам А) және В) пунктерінен тұрады.

А)  $u_r(x, t) = u_r^{(0)}(x, t), r = \overline{1, N}$ , деп алып,  $\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t)$  функцияларының бірінші жуықтауларын (11)–(14) есебінің шешімін тауып анықтаймыз.

$\lambda^{(1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x), \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t) = \tilde{v}_r^{(0)}(x, t);$  деп алып,  $\{\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$ , жүйесін  $\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)$  тізбектің шегі ретінде келесі әдіспен табамыз:

**1.1-қадам.** Кез келген  $x \in [0, \omega]$  үшін  $Q_v(x, h)$  матрицасының кері матрицасы бар деп жорып және  $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t)$  деп алып, (18)-теңдеуден  $\lambda^{(1,1)}(x) = (\lambda_1^{(1,1)}(x), \lambda_2^{(1,1)}(x), \dots, \lambda_N^{(1,1)}(x))'$  табамыз:

$$\lambda^{(1,1)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, u^{(0)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(1,0)})\}, \quad r = \overline{1, N}.$$

Табылған  $\lambda_r^{(1,1)}(x)$ -ді (17)-теңдеуіне қойып,  $\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t)$ -ді анықтаймыз:

$$\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(1,1)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(0)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(1,0)}).$$

**1.2-қадам.** (18) теңдеуден  $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t)$  деп алып,  $\lambda^{(1,2)}(x)$ -ті табамыз:  $\lambda^{(1,2)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, u^{(0)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(1,1)})\}, r = \overline{1, N}$ . Қайтадан (17) теңдеуді қолданып,

$\{\tilde{v}_r^{(1,2)}(x, t)\}$  анықталады:  $\tilde{v}_r^{(1,2)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(1,2)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(0)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(1,1)}), r = \overline{1, N}$ .

(1, m)-ші қадамда  $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)\}$  қос жүйесін аламыз. (11)–(14) есебінің  $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)\}$  тізбегі анықталсын және  $m \rightarrow \infty$  ұмтылғанда, сәйкесінше, үзіліссіз  $\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x, t)$  функцияларына жинақталсын деп жоримыз, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ ,  $(x, t) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ .

В)  $u_r^{(1)}(x, t)$  функциясын (15) теңдеуден анықтаймыз:  $u_r^{(1)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi$ ,  $(x, t) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ .

**2-қадам** 1-ші қадамға ұқсас жүргізіледі.

Келесі тұжырымның шарттары ұсынылған алгоритмнің (11)–(15) шеттік есептің шешіміне бірқалыпты жинақталуын қамтамасыз етеді.

**1-теорема.** Қандай да бір  $h > 0: Nh = T, N = 1, 2, \dots$  және  $v, v \in N$  үшін  $(nN \times nN)$ -өлшемді  $Q_v(x, h)$  матрицасының барлық  $x \in [0, \omega]$  үшін кері матрицасы бар болып,

$$1) \| [Q_v(x, h)]^{-1} \| \leq \gamma_v(x, h);$$

$$2) q_v(x, h) = \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \left[ 1 + \gamma_v(x, h) \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \right] \leq \mu < 1$$

теңсіздіктері орындалса, онда (11)–(15) есебінің жалғыз ғана шешімі бар болады, мұндағы  $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(x, t)\|$ ,  $\mu - const$ .

Бұл теореманың дәлелдеуі [1] жұмысында келтірілген теореманың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

(1)–(3) және (11)–(15) есептерінің эквиваленттілігінен 1-теоремадан келесі теорема шығады.

**2-теорема.** 1-теореманың шарттары орындалсын. Сонда (1)–(3) есебінің жалғыз ғана  $u^*(x, t)$

шешімі бар болып,  $\max \left\{ \|u^*\|_0, \left\| \frac{\partial u^*}{\partial x} \right\|_0 \right\} \leq M_v(x, h) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\}$ , теңсіздігі орындалады,

мұндағы  $M_v(x, h) - \psi(t), f(x, t)$  функцияларынан тәуелсіз функция.

#### Список литературы

1 Орумбаева Н.Т. Об одном алгоритме нахождения решения периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений // Сибирские электронные математические известия. — 2013. — Т. 10. — С. 464–474.

2 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

Н.Т.Орумбаева

### Периодические решения систем гиперболических уравнений

Статья посвящена исследованию периодических краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. На основе метода параметризации предложены конструктивные алгоритмы нахождения приближенных решений периодических краевых задач для систем гиперболических уравнений. По исходным данным задачи получены достаточные условия сходимости и осуществимости предложенных алгоритмов.

N.T.Orumbaeva

### **Periodic solutions system of hyperbolic equations**

The thesis is devoted to the research periodical boundary value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivative. In the thesis work on the basis of the method of parameterization are proposed offered constructive algorithms of finding of approaching solution of periodical boundary value tasks for hyperbolic equations. Are received sufficient conditions of resemblance and realizing proposed algorithms by the initial facts of tasks.

#### References

- 1 Orumbaeva N.T. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, 10, P. 464–474.
- 2 Dzhumabaev D.S. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, 29, 1, p. 50–66.

Репозиторий КАРГУ