Окончательный выбор поставщиков осуществляется на основе результатов аддитивной свертки критериев по каждому из предприятий и выбора наибольшего значения (рис. 5).

Список литературы

1. *Саати Т.* Математические модели конфликтных ситуаций. — М.: Сов. радио, 1977. — 304 с.
2. *Прозоров В.В.* Некоторые аспекты организации внешнеэкономической деятельности на промышленном предприятии // Вiсник Донецького унiверситету. — В.: Економiчнi науки, 2000. — Вип. 2. — С. 147–150.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993. — 378 с.
4. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 368 с.
5. *Белый А.П., Лысенко Ю.Г., Макаров К.Г., Мадых А.А.* Комплексные оценки в системе рейтингового управления предприятием. — Донецк: ООО «Юго-Восток Лтд», 2003. — 120 с.
6. *Головкин Н.Н.* Аспекты прикладной логистики: монография. — М.: ИНФРА-М, 2002. — 147 с.
7. *Мешалкин В.П.* Принципы промышленной логистики. — М.: Генуя, 2002. — 722 с.

УДК 517.956.3

Г.Базыкен[1], Б.С.Нуримов[1], А.Тунгатаров[2]

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева;
[2]АО «Финансовая академия», Астана

ЗАДАЧА ТИПА РОБИНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ И ЛИНИЕЙ

Мақалада жазықтықтағы сингулярлы нүктесі және сызығы бар екінші ретті эллиптикалық жүйелердің бір класы үшін үзіліссіз шешімдердің көп бейнесі алынды және осы жүйе үшін шексіз бұрыштық облыста Робин есебі шешілді. Алынған нәтижелер тегіс оң қисықты беттердің шексіз аз иілу теориясында қолданылуы мүмкін.

In work given the variety of solutions of one class of the second order elliptic systems in the plane with singular point and line and solved the problem Robin for this systems in unbounded angular domains. Given results can be used in the theory of infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flattening line.

Пусть $0<\varphi_1\le 2\pi$ и $c_1\psi_2(0)+c_2\psi_1(0)=\alpha_1$, $c_1\psi'_2(0)+c_2\psi'_1(0)=\alpha_2$. Рассмотрим в G уравнение

$$W_{\bar z\bar z}+\beta W_{z\bar z}+\frac{a_1(\varphi)}{2|z|}W_{\bar z}+\frac{a_2(\varphi)}{4|z|^{2-\alpha}(y-k_1x)^{\alpha}}\overline{W}=\frac{a_3(\varphi)|z|^{\nu}}{4(y-k_2x)^{\alpha}}, \tag{1}$$

где $\beta, k_1, k_2, \alpha, \nu$ — действительные числа, причем $k_1\ne 0,\ k_2\ne 0,\ 0<\alpha<1,\ \nu>0,\ \beta\ne\pm 1$; $z=x+iy$; $a_j(\varphi)\in C[0,\varphi_1],\ (j=\overline{1,3})$;

$$W_{\bar z}=\frac{1}{2}(W_x-iW_y),\quad W_{z\bar z}=(W_z)_{\bar z},\quad W_{\bar z\bar z}=(W_{\bar z})_{\bar z}. \tag{2}$$

Решения уравнения (1) ищем в классе

$$W_p^2(G)\cap C(G), \tag{3}$$

где $1<p<\dfrac{2}{2-\nu}$, если $\nu<2$ и $p>1$, если $\nu\ge 2$.

Здесь $W_p^2(G)$ — пространство С.Л.Соболева [1].

В работе [2] построено общее решение уравнения (1) и решена задача Дирихле для него при $\beta=0$, $a_1(\varphi)\equiv a_2(\varphi)\equiv a_3(\varphi)\equiv 0$. При $\alpha=0$ уравнение (1) становится уравнением только с сингулярной точкой и оно изучено в работах [3, 4]. Следует отметить, что эллиптические системы на плоскости одновременно с сингулярной точкой и линией еще не исследованы. Такие уравнения могут быть применены в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с линией и точкой уплощения.

Дифференциальные операторы (2) в полярной системе координат записываются в виде [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right);$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\bar z^2}=\frac{e^{2i\varphi}}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2i}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{4}$$

Используя формулы (4), уравнение (1) записываем в полярной системе координат:

$$(e^{2i\varphi}+\beta)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{i}{r^2}(a_1(\varphi)e^{i\varphi}-2e^{2i\varphi})\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{2i}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\varphi}e^{2i\varphi}+\frac{\beta-e^{2i\varphi}+a_1(\varphi)e^{i\varphi}}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(\beta-e^{2i\varphi})\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{a_2(\varphi)}{r^2(\sin\varphi-k_1\cos\varphi)^\alpha}\overline{W}=\frac{a_3(\varphi)r^{\nu-\alpha}}{(\sin\varphi-k_2\cos\varphi)^\alpha}. \tag{5}$$

Решения уравнения (5) из класса (3) ищем в виде

$$W(r,\varphi)=r^\mu\psi(\varphi),\ \mu=\nu+2-\alpha, \tag{6}$$

где $\psi(\varphi)$ — новая неизвестная функция из класса $C^2[0,\varphi_1]$.

Подставляя функцию $W(r,\varphi)$, заданную формулой (6), в уравнение (5), получим:

$$\psi''(\varphi)+b_1(\varphi)\psi'(\varphi)+b_2(\varphi)\psi(\varphi)=-b_3(\varphi)\overline{\psi(\varphi)}+b_4(\varphi), \tag{7}$$

где

$$b_1(\varphi)=\frac{i((a_1(\varphi)e^{i\varphi}-2e^{2i\varphi})+2(\nu-\alpha+2)e^{2i\varphi})}{\beta-e^{2i\varphi}},\ b_2(\varphi)=\frac{(\nu-\alpha+2)((\nu-\alpha+1)+(\beta-e^{2i\varphi}+a_1(\varphi)e^{i\varphi}))}{\beta-e^{2i\varphi}},$$
$$b_3(\varphi)=\frac{a_2(\varphi)}{(\sin\varphi-k_1\cos\varphi)^\alpha(\beta-e^{2i\varphi})},\ b_4(\varphi)=\frac{a_3(\varphi)}{(\sin\varphi-k_2\cos\varphi)^\alpha(\beta-e^{2i\varphi})}.$$

Рассмотрим соответствующее (7) однородное уравнение:

$$\psi''(\varphi)+b_1(\varphi)\psi'(\varphi)+b_2(\varphi)\psi(\varphi)=0. \tag{8}$$

Из условия $\beta\neq\pm1$ следует, что $\beta-e^{2i\varphi}\neq 0$ и поэтому коэффициенты уравнения (8) непрерывны в $[0,\varphi_1]$. Следовательно, оно имеет фундаментальную систему решений из класса $C[0,\varphi_1]$. Пусть $\psi_1(\varphi)$, $\psi_2(\varphi)$ — фундаментальная система решений уравнения (8). Методом вариации произвольных постоянных уравнение (7) приводим к интегральному уравнению

$$\psi(\varphi)=(B\psi)(\varphi)+c_1J_0(\varphi)+c_2I_0(\varphi)+F(\varphi), \tag{9}$$

где

$$J_0(\varphi)=\psi_1(\varphi),\ I_0(\varphi)=\psi_2(\varphi),\ (B\psi)(\varphi)=\int_0^\varphi h(\varphi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}d\gamma,\ F(\varphi)=\int_0^\varphi g(\varphi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}d\gamma,$$
$$h(\varphi,\gamma)=\frac{b_3(\gamma)(\psi_1(\varphi)\psi_2(\gamma)-\psi_2(\varphi)\psi_1(\gamma))}{\Delta(\gamma)},$$
$$g(\varphi,\gamma)=\frac{b_4(\gamma)(\psi_1(\varphi)\psi_2(\gamma)-\psi_2(\varphi)\psi_1(\gamma))}{\Delta(\gamma)},\ \Delta(\varphi)=\psi_1(\varphi)\psi_2'(\varphi)-\psi_2(\varphi)\psi_1'(\varphi).$$

$\Delta(\varphi)\neq 0$ в области $[0,\varphi_1]$, как Вронскиан фундаментальной системы решений. Так как $0<\alpha<1$, $\Delta(\varphi)\neq 0$ в $[0,\varphi_1]$, то несобственные интегралы, определяющие функции $F(\varphi)$, $(B\psi)(\varphi)$, сходятся в $[0,\varphi_1]$.

В дальнейшем также используем функции

$$J_k(\varphi)=\int_0^\varphi h(\varphi,\gamma)\overline{J_{k-1}(\gamma)}d\gamma,\ I_k(\varphi)=\int_0^\varphi h(\varphi,\gamma)\overline{I_{k-1}(\gamma)}d\gamma,\ F_k(\varphi)=\int_0^\varphi h(\varphi,\gamma)\overline{g_{k-1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$(B^0\psi)(\varphi)=\psi(\varphi),\ (B^1\psi)(\varphi)=(B\psi)(\varphi),\ (B^k\psi)(\varphi)=(B(B^{k-1}\psi)(\varphi))(\varphi),\ \ (k=\overline{1,\infty}).$$

Действуя оператором B на обе части равенства (9) и подставив полученное значение $(B\psi)(\varphi)$ обратно в (9), имеем:

$$\psi(\varphi)=(B^2\psi)(\varphi)+c_1J_0(\varphi)+\overline{c}_1J_1(\varphi)+c_2I_0(\varphi)+\overline{c}_2I_1(\varphi)+F_0(\varphi)+F_1(\varphi). \tag{10}$$

Опять, действуя оператором B на обе части равенства (10) и подставив полученное значение $(B\psi)(\varphi)$ в (9), получим:

$$\psi(\varphi)=(B^3\psi)(\varphi)+c_1J_0(\varphi)+\overline{c}_1J_1(\varphi)+c_1J_2(\varphi)+\overline{c}_1J_3(\varphi)+$$
$$+c_2I_0(\varphi)+\overline{c}_2I_1(\varphi)+c_2I_2(\varphi)+\overline{c}_2I_3(\varphi)+F_0(\varphi)+F_1(\varphi)+F_2(\varphi).$$

Продолжая этот процесс $2n$ раза, имеем:

$$\psi(\varphi)=(B^{2n+1}\psi)(\varphi)+c_1\sum_{k=0}^{n}J_{2k}(\varphi)+c_2\sum_{k=0}^{n}I_{2k}(\varphi)+\overline{c}_1\sum_{k=1}^{n}J_{2k-1}(\varphi)+\overline{c}_2\sum_{k=1}^{n}I_{2k-1}(\varphi)+\sum_{k=0}^{2n-1}F_k(\varphi). \tag{11}$$

Имеют место следующие легко проверяемые неравенства:

$$\left|\left(B^k\psi\right)(\varphi)\right|\le|\psi|_0\cdot\frac{(|h|_1\cdot\varphi)^k}{k!},\quad |J_k(\varphi)|\le|\psi_2|_0\cdot\frac{(|h|_1\cdot\varphi)^k}{k!},$$
$$|I_k(\varphi)|\le|\psi_1|_0\cdot\frac{(|h|_1\cdot\varphi)^k}{k!},\quad |F_k(\varphi)|\le|g|_1\cdot\frac{(|h|_1\cdot\varphi)^k}{k!}, \tag{12}$$

где

$$|h|_1=\max_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_1}|h(\varphi,\gamma)|,\ |\psi|_0=\max_{0\le\varphi\le\varphi_1}|\psi(\varphi)|\ \ |g|_1=\max_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_1}|g(\varphi,\gamma)|.$$

Если в (11) перейти к пределу при $n\to\infty$, то в силу (12) получим:

$$\psi(\varphi)=c_1P_2(\varphi)+c_2Q_2(\varphi)+\overline{c}_1P_1(\varphi)+\overline{c}_2Q_1(\varphi)+F(\varphi), \tag{13}$$

где

$$Q_2(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}I_{2k}(\varphi),\ Q_1(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{2k-1}(\varphi),$$
$$P_2(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k}(\varphi),\ P_1(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(\varphi),\ F(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(\varphi).$$

Используя неравенства (12), получим оценки для $Q_1(\varphi),\ Q_2(\varphi),\ P_1(\varphi),\ P_2(\varphi),\ F(\varphi)$:

$$|Q_1(\varphi)|\le\ |\psi_1(\varphi)|_0\cdot sh(|h|_1\cdot\varphi),\quad |Q_2(\varphi)|\le\ |\psi_1(\varphi)|_0\cdot ch(|h|_1\cdot\varphi),$$
$$|P_1(\varphi)|\le\ |\psi_2(\varphi)|_0\cdot sh(|h|_1\cdot\varphi),\quad |P_2(\varphi)|\le\ |\psi_2(\varphi)|_0\cdot ch(|h|_1\cdot\varphi),\quad |F(\varphi)|\le\ |g|_1\cdot\exp(|h|_1\cdot\varphi). \tag{14}$$

Из (6) и (13) следует

$$W(r,\varphi)=r^{\mu}(c_1P_2(\varphi)+c_2Q_2(\varphi)+\overline{c}_1P_1(\varphi)+\overline{c}_2Q_1(\varphi)+F(\varphi)). \tag{15}$$

Используя свойства функций $Q_1(\varphi),\ Q_2(\varphi),\ P_1(\varphi),\ P_2(\varphi),\ F(\varphi)$, можно доказать, что функция $W(r,\varphi)$, заданная формулой (15), является решением уравнения (1) из класса (3).

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет многообразие решений из класса (3), которое находится по формуле (15).*

Рассмотрим задачу Робина для уравнения (1). Задача типа Дирихле, Неймана и Робина в бесконечно угловой области произвольного раствора для уравнения вида (1) еще не изучена.

Задача R_1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (3), удовлетворяющее условиям

$$W(r,0)=\alpha_1r^{\mu},\ W'_{\varphi}(r,0)=\alpha_2r^{\mu}, \tag{16}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2$ — заданные действительные числа.

Решение. Для решения задачи R_1 используем формулу (15). Постоянные c_1 и c_2 в формуле (15) выбираем так, чтобы решение уравнения (1), представленное в виде (15), удовлетворяло условию (16). Легко можно получить равенства:

$$Q_1(0)=P_1(0)=F(0)=0,\ \ Q_2(0)=\psi_1(0),\quad P_2(0)=\psi_2(0);$$

$$Q_1'(0)=P_1'(0)=F'(0)=0,\ \ Q_2'(0)=\psi_1'(0),\quad P_2'(0)=\psi_2'(0).$$

Следовательно,

$$W(r,o)=(c_1\psi_2(0)+c_2\psi_1(0))r^{\mu},\quad \frac{\partial W(r,o)}{\partial\varphi}=(c_1\psi_2'(0)+c_2\psi_1'(0))r^{\mu}\ . \tag{17}$$

Подставляя функцию $W(r,\varphi)$, заданную формулой (15), в равенства (16), учитывая при этом равенства (17), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1\psi_2(0)+c_2\psi_1(0)&=\alpha_1,\\ c_1\psi_2'(0)+c_2\psi_1'(0)&=\alpha_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Так как определитель системы $|\Delta(0)|\neq 0$, то система (18) имеет единственное решение:

$$c_1=\frac{\alpha_1\psi_1'(0)-\alpha_2\psi_1(0)}{\Delta(0)},\ c_2=\frac{\alpha_2\psi_2(0)-\alpha_1\psi_2'(0)}{\Delta(0)}\ . \tag{19}$$

Следовательно, задача R_1 имеет решение вида

$$W(r,\varphi)=\frac{r^{\mu}}{\Delta(0)}((\alpha_1\psi_1'(0)-\alpha_2\psi_1(0))P_2(\varphi)+(\alpha_1\overline{\psi_1'(0)}-\alpha_2\overline{\psi_1(0)})P_1(\varphi)+$$

$$+(\alpha_2\psi_2(0)-\alpha_1\psi_2'(0))Q_2(\varphi)+(\alpha_2\overline{\psi_2(0)}-\alpha_1\overline{\psi_2'(0)})Q_1(\varphi)+F(\varphi))\ . \tag{20}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Задача* R_1 *имеет единственное решение вида* (6)*, которое находится по формуле* (20).

Аналогично можно решить следующую задачу.

Задача R_2. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} l_1W(r,0)+l_2W_{\varphi}'(r,0)&=l_5r^{\mu},\\ l_3W(r,0)+l_4W_{\varphi}'(r,0)&=l_6r^{\mu}, \end{aligned} \tag{21}$$

где l_j, $(j=1,6)$ — заданные действительные числа.

Справедлива

Теорема 3. *При* $l_2l_3-l_1l_4\neq 0$ *задача* R_2 *имеет единственное решение вида* (6)*, которое находится по формуле*

$$W(r,\varphi)=\frac{r^{\mu}}{\delta(0)}(((l_3l_5-l_1l_6)\psi_2(0)+(l_4l_5-l_2l_6)\psi_2'(0))P_2(\varphi)+((l_3l_5-l_1l_6)\overline{\psi_2(0)}+$$

$$+(l_4l_5-l_2l_6)\overline{\psi_2'(0)})P_1(\varphi)+((l_1l_6-l_3l_5)\psi_1(0)+(l_2l_6-l_4l_5)\psi_1'(0))Q_2(\varphi)+$$

$$+((l_1l_6-l_3l_5)\overline{\psi_1(0)}+(l_2l_6-l_4l_5)\overline{\psi_1'(0)})Q_1(\varphi)+F(\varphi)),$$

где

$$\delta(0)=\Delta(0)\cdot(l_2l_3-l_1l_4)\ .$$

Список литературы

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
3. *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. — Алматы: Ғылым, 2005. — 169 с.
4. *Алтынбек С.А., Тунгатаров А.Б.* Задача Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на плоскости // Вестн. ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Сер. естеств.-техн. наук. — Астана, 2006. — № 4(50). — С. 11–20.