УДК 512.54

А.В.Зенков

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия
(E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)

О многообразиях m-групп с тождеством $x_*^n = x^{-n}$

Напомним, что m-группа — это пара $(G, *)$, где G есть l-группа и $*$ есть убывающий автоморфизм l-группы G второго порядка. Понятие m-группы может быть соотнесено, как алгебраическая система сигнатуры m, и ясно, что m-группы образуют многообразие в этой сигнатуре. Множество M многообразий всех m-групп является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M также является решеткой относительно естественно определенных операций объединения и пересечения на многообразии m-групп. В статье изучены многообразия. Также автором даны некоторые результаты о структуре M.

Ключевые слова: m-группа, многообразие, решетка, автоморфизм, сигнатура, определяющее тождество.

Введение

Исследование групп монотонных преобразований линейно упорядоченных множеств и связанных с ними упорядочений на группах имеет богатую историю. Значительный сдвиг в изучении таких групп произошел после работы M.Giraudet и F.Lucas [1], в которой установлена связь между полуупорядоченными группами и группами монотонных подстановок и связанными с ними решеточно упорядоченными группами. Предложенная концепция оказалась особенно продуктивной за счет расширения сигнатуры решеточно упорядоченных групп за счет введения новой универсальной алгебры — m-группы. Определение и основные свойства многообразий m-групп и их связь с теорией многообразий решеточно упорядоченных групп установлены M.Giraudet и J.Rachunek [2]. Большое количество вопросов возникло о строении и свойствах таких групп. Многие из них решены, но значительное число проблем, главным образом связанных с особенностями дополнительной операции m-группы, остаются открытыми.

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченная группа (ℓ-группа) — это алгебраическая система G сигнатуры $\ell =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge >$, совмещающая в себе структуры группы и решетки, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, \ \ x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Согласно [2] m-группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge,_* >$, такая, что $< G, \cdot, ^{-1}, e, \vee, \wedge >$ является ℓ-группой, а одноместная операция $_*$ задает автоморфизм группы $< G, \cdot, ^{-1}, e >$ порядка 2 и антиавтоморфизм решетки $< G, \vee, \wedge >$, т.е. $_*$ взаимооднозначно отображает G на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*; \ \ (x_*)_* = x; \ \ (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*; \ \ (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем $_*$ называем реверсивным автоморфизмом ℓ-группы G второго порядка и m-группу G с фиксированным реверсивным автоморфизмом $_*$, записывам как пару $(G, {}_*)$.

Класс $\mathcal{M}$ всех m-групп образует многообразие сигнатуры m. Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп.

Как обычно, $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$, $|x|=x\vee x^{-1}$, $x\gg y$ означает, что элементы x,y архимедово неэквивалентны, т.е. $|x|>|y|^n$ для любого натурального числа n. Выражение $x\sim y$ используем, если элементы x,y архимедово эквивалентны.

Всюду в работе через $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ обозначают множества натуральных и целых чисел соответственно, $\mathbb{R}$ — естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Через $var_m(\mathcal{K})$ обозначим многообразие m-групп, порожденное классом m-групп $\mathcal{K}$.

Пусть Λ — некоторое линейно упорядоченное множество и a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ, т.е. для любых $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ верно $((\lambda)a)a=\lambda$ и $\lambda<\lambda'\Leftrightarrow(\lambda)a>(\lambda')a$. Через $Aut(\Lambda)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Λ. Отметим, что $Aut(\Lambda)$ является решеточно упорядоченной группой относительно поточечного объединения и пересечения. Группа $Aut(\Lambda)$ может быть превращена в m-группу, если операцию $_*$ определить при помощи равенства $g_*=aga$ для всякого $g\in Aut(\Lambda)$. Стандартно представлением m-группы $(G,_*)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Λ является m-гомоморфизм $\nu: G\to Aut(\Lambda)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G,Λ,a). Отметим [1], что всякая m-группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление (H,T,a) назовем m-транзитивным, если для всех $\tau,\tau'\in T$, за исключением точки o, существует такой $x\in H_*=gr(H,a)$, что $(\tau)x=\tau'$ (здесь o — точка множества T, неподвижная относительно действия автоморфизма a). Как обычно, неединичная m-группа $(G,_*)$ называется подпрямо m-неразложимой, если пересечение всех ее неединичных m-идеалов отлично от единицы. Как показано автором [3], всякая подпрямо неразложимая m-группа допускает точное m-транзитивное представление. Из общей теории алгебраических систем известно, что всякая алгебраическая система является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебраических систем. Таким образом, всякое многообразие m-групп порождается своими m-транзитивными группами.

Через $\mathcal{I}^1=\mathcal{I}$ обозначим многообразие m-групп, определяемое тождеством $x_*=x^{-1}$, которое является наименьшим нетривиальным элементом M. Для многообразий m-групп определена операция умножения. Напомним ее. Если $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ — многообразия m-групп, то их произведение $\mathcal{X}\cdot\mathcal{Y}$ есть многообразие всех таких m-групп $(G,_*)$, и в ней найдется такой m-идеал $M\in\mathcal{X}$, что $G/M\in\mathcal{Y}$. Отметим, что операция умножения многообразий ассоциативна. Теперь для каждого натурального $n\geq 2$ определим $\mathcal{I}^n=\underbrace{\mathcal{I}\cdot\ldots\cdot\mathcal{I}}_{n\text{-раз}}$.

Важность изучения многообразий m-групп с тождеством $x_*^n=x^{-n}$ можно объяснить следующими, уже известными, фактами: 1) многообразие $\mathcal{I}^1$ является наименьшим нетривиальным элементом решетки M, и, в свою очередь, многообразие абелевых m-групп $\mathcal{A}$ накрывает $\mathcal{I}^1$; 2) многообразие $\mathcal{I}^2$ содержит единственное неабелево накрытие многообразия $\mathcal{I}^1$ в решетке M (см. ниже); 3) многообразие $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{I}^n$ является идемпотентом, т.е. $\mathcal{J}^2=\mathcal{J}$.

В [1], в частности, доказано, что $\mathcal{I}^n$ определяется тождеством $x_*^{2^{n-1}}=x^{-2^{n-1}}$. Мы показываем, что других многообразий, определяемых подобными тождествами, нет. Более точно, если $n=2^m(2s+1), m\geq 0, s>0$, то тождество $x_*^n=x^{-n}$ влечет $x_*=x^{-1}$.

Рассмотрим группу

$$S_2=\langle a_0,a_1,b|\ [a_0,a_1]=e, a_0^b=a_1, a_1^b=a_0\rangle.$$

Если $g\in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g=b^ka_0^ma_1^n$, $k,m,n\in\mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g\geq e\Leftrightarrow k>0$ или $k=0, m\geq 0, n\geq 0$, S_2 является ℓ-группой. Определим отображение $_*: S_2\to S_2$ по правилу

$$(g)_*=b^{-k}a_0^{-m}a_1^{-n}.$$

Тогда $(S_{2,*})$ будет m–группой. Пусть $\mathcal{S} = var_m((S_{2,*}))$. Несложно заметить, что $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}^2$. Показано, что $\mathcal{S}$ строго содержится в $\mathcal{I}^2$. Важность $\mathcal{S}$ объясняется тем, что оно является единственным неабелевым накрытием многообразия $\mathcal{I}^1$ в решетке M.

Все используемые понятия теории групп и решеточно упорядоченных групп соответствуют работам [4, 5].

Основной результат

Пусть $\mathcal{X}$ — многообразие m-групп, определяемое тождеством $x_*^n = x^{-n}$, где $n = 2^m(2s+1)$, $m \geq 0, s > 0$. Предположим, что $\mathcal{I} \subsetneqq \mathcal{X}$ и n — наименьшее с этим свойством. Найдется m-группа $(G, \ _*) \in \mathcal{X}$, такая, что $g_*^{2^m} \neq g^{-2^m}$ для некоторого $g \in G$. Тогда $d = g^{2^m} g_*^{2^m} = g^{-2s2^m} g_*^{-2s2^m} \neq e$ и $d_* = g_*^{2^m} g^{2^m} = g_*^{-2s2^m} g^{-2s2^m}$. Отсюда вытекает

$$d^{g^{2^m}} = g^{-2^m} g^{-2s2^m} g_*^{-2s2^m} g^{2^m} = g_*^{-2s2^m} g^{-2s2^m} = d_*.$$

Следовательно,

$$(d^n)^{g^{2^m}} = d_*^n = d^{-n}$$

и поэтому $(d^n)^{g^{-2s2^m}} = d^n$.

Вычислим

$$(d^n)^{g^{-2s2^m}} = g^{2s2^m} g^{2^m} g_*^{2^m} \cdot \ldots \cdot g^{2^m} g_*^{2^m} g^{-2s2^m} = g_*^{2^m} \cdot \ldots \cdot g^{2^m} g_*^{2^m} g^{-2s2^m} g^{2s2^m} g^{2^m} = d_*^n.$$

Но тогда $d^n = d_*^n = d^{-n}$, что влечет $d = e$. Противоречие.

Покажем теперь, что тождество $[x,y]_* = [y,x]$ отличает $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}^2$.

Как отмечалось выше, всякий $g \in S = \langle a_1, a_2, b | [a_1, a_2] = e, a_1^b = a_2, a_2^b = a_1 \rangle$ представим в виде $g = b^k a_1^m a_2^n$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому если $x, y \in S$, то $[x,y] = a_1^s a_2^{-s}$ и тогда $[x,y]_* = [y,x]$ — тождество, истинное на $\mathcal{S}$.

Для m-группы $(G, \ _*)$ и m-транзитивного представления (H, T, a) рассмотрим стандартное (в смысле ℓ-групп) сплетение $GWrH$. Элемент сплетения будем записывать в виде $\prod\limits_{\tau} g_\tau \cdot h$, где $g_\tau \in G$, $\tau \in T, h \in H$. В [2] на $GWrH$ был определен реверсивный автоморфизм второго порядка $_*Wra$ по правилу $(\prod\limits_{\tau} g_\tau \cdot h)_*Wra = \prod\limits_{\tau} (g_*)_{(\tau)a} \cdot aha$, превращающий $GWrH$ в m-группу. Отметим, что база сплетения $\prod\limits_{\tau} G_\tau$ устойчива относительно действия $_*Wra$.

Напомним понятие мимикрирования. Рассмотрим представления (G, Ω, a) и (H, Λ, b). Фикируем некоторое конечное, но произвольное множество $\Phi = \{w_p(\overline{x}, \overline{x_*}) \parallel p = 1, \ldots, N\}$ слов сигнатуры m от переменных $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Далее рассмотрим произвольный $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots h_n) \in H^n$ и произвольную пару точек $\lambda, (\lambda)b \in \Lambda$. Пусть $\Lambda_\Phi = \{(\lambda)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\} \cup \{((\lambda)b)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\}$. Ясно, что Λ_Φ линейно упорядочено. Будем говорить, что (G, Ω, a) мимикрирует (H, Λ, b), если найдутся $\alpha, (\alpha)a \in \Omega$ и $\overline{g} = (g_1, g_2, \ldots g_n) \in G^n$, такие, что линейно упорядоченное множество $\Omega_\Phi = \{(\alpha)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\} \cup \{((\alpha)a)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\}$ «сохраняет структуру» Λ_Φ, т.е. $((\alpha)a^\varepsilon)w_p < ((\alpha)a^{\varepsilon'})w_q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ((\lambda)b^\varepsilon)w_p < ((\lambda)b^{\varepsilon'})w_q$, где $\varepsilon, \varepsilon' = 0$либо 1.

Представление (G, Ω, a) мимикрирует m- группу $(H_{,*})$, если оно мимикрирует ее всякое представление. Наконец, представление (G, Ω, a) мимикрирует многообразие $\mathcal{V}$, если $(G_{,*}) \in \mathcal{V}$ и (G, Ω, a) — мимикрирует все группы из $\mathcal{V}$. Несложно заметить, если (G, Ω, a) мимикрирует $\mathcal{V}$, то $(G_{,*})$ порождает $\mathcal{V}$.

В [6] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть многообразие m-групп $\mathcal{U}$ порождается классом m-групп $\mathbf{U}$ и многообразие m-групп $\mathcal{V}$ мимикрируется классом m-групп $\mathbf{V}$. Тогда $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = var_m(\mathbf{W})$, где $\mathbf{W} = \{(UWrV,_* Wra)\}$, $(U, \ _*) \in \mathbf{U}$, $(V, T, a) \in \mathbf{V}$.

Рассмотрим аддитивную m-группу $(\mathbb{Z}, Inv)$ целых чисел, где $(z)Inv = -z$ и ее правое регулярное представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, a), (x)a = -x$. Представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbf{Inv})$ мимикрирует $\mathcal{I}^1$. В силу сказанного выше $\mathcal{I}^2 = var_m((\mathbb{Z}Wr\mathbb{Z}, InvWra))$. Покажем, что на $(\mathbb{Z}Wr\mathbb{Z}, InvWra)$ нарушено тождество $[x, y]_* = [y, x]$. Действительно, если $x = \prod\limits_{i \in \mathbb{Z}} z_i \cdot 0$, где $z_{100} = 1, z_i = 0$ при $i \neq 100$, $y = \prod\limits_{i \in \mathbb{Z}} 0_i \cdot 1$, то

$$[x, y] = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \widetilde{z}_i, \text{ где } \widetilde{z}_{99} = 1, \widetilde{z}_{100} = -1, \widetilde{z}_i = 0 \text{ при } i \neq 99, 100.$$

Следовательно,

$$[x, y]_* = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \widetilde{z}_i \cdot 0, \text{ где } \widetilde{z}_{-99} = -1, \widetilde{z}_{-100} = 1$$

и поэтому $[x, y]_* \neq [y, x]$.

References

1 *Giraudet M., Lucas F.* Groupes a' motie' ordonne's // Fundamenta Mathematicae. — 1991. — Vol. 139. — No. 2. — P. 75–89.

2 *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1999. — Vol. 49. — No. 124. — P. 743-766.

3 *Зенков А.В.* О m-транзитивных группах // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94. — Вып. 1. — С. 151-153.

4 *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967.

5 *Kopytov V.M., Medvedev N.Ya.* The theory of lattice-ordered groups // Mathematics and its Applications. — 1994. —Dordrecht. — Vol. 307. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.

6 *Зенков А.В.* О произведениях многообразий m-групп // Алгебра и логика. — 2012. — Т. 51. — № 6. — С. 763-768.

А.В. Зенков

$x_*^n = x^{-n}$ теңбе-теңдікті m-группалардың көпбейнелігі жайында

Мақалада m-группа — бұл $(G, *)$ жұбы, мұндағы G l-группа болып табылады және $*$ екінші ретті G l-группаның кемімелі автоморфизмі. Сондай-ақ m-группа түсінігі m сигнатурасының алгебралық жүйесі ретінде сәйкестендірілуі мүмкін және m-группалар осы сигнатурада көпбейнелікті құрайтыны анық. Барлық m-группалар көпбейнеліктерінің M жиыны теоретикалы-жиынды енгізуге қатысты ішінара реттелген жиын болып табылады. Сонымен қатар M жиыны m-группалар көпбейнеліктерінде табиғи анықталған бірігу және қиылысу операцияларына қатысты тор болып есептеледі. Автор көпбейнеліктерді зерттеп, құрылымы жайында кейбір нәтижелерді анықтады.

A.V.Zenkov

Varieties with $x_*^n = x^{-n}$ identity m-groups

Recall that an m-group is a pair $(G,_*)$, where G is an ℓ-group and $_*$ is a decreasing order two automorphism of G. An m-group can be regarded as an algebraic system of signature m and it is obvious that the m-groups form a variety in this signature. The set M of varieties of all m-groups is a partially ordered set with respect to the set-theoretic inclusion. Moreover, M is a lattice with respect to the naturally defined operations of intersection and union of varieties of m-groups. We study the varieties which is defined by the identity $x_*^n = x^{-n}$. We deduce some results on the structure of M.

References

1 Giraudet M., Lucas F. Fundamenta Mathematicae, 1991, 139, 2, p.75–89.

2 Giraudet M.,Rachunek J., *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1999, 49, 124, p. 743–766.

3 Zenkov A.V. *Mathematical Notes*, 2013, 94, 1, p. 151–153.

4 Kurosh A.G. *Group Theory*, Moscow: Nauka, 1967.

5 Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. *Mathematics and its Applications*, 1994, 307, Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.

6 Zenkov A.V. *Algebra and Logic*, 2012, 51, 6, p. 763–768.