

A.N.Yesbayev, G.A.Yessenbayeva

About one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load

In this article we considered one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load. The given boundary value problem is reduced to the integral equation of Volterra in general form. The questions of solvability of integral equations with all meanings of parameter k of the loaded summand when the point of load is stationary are investigated. The theorem of solvability of the given boundary value problem with the stationary point of load is obtained.

References

- 1 Polyanin A.D. *The reference book about linear equations of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 2001, p. 86.
- 2 Prudnikov A.P., Brychrov Yu.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*. — Vol. 2. Special functions, Moscow: Fizmatlit, 2003, p. 273.
- 3 Prudnikov A.P., Brychrov Yu.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*. — Vol. 1. Elementary functions, Moscow: Fizmatlit, 2002, p. 112.

УДК 517.968

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: adilet_e@mail.ru)

О свойствах ядра и разрешимости одного интегрального уравнения Вольтерра

В статье рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра второго рода с заданным ядром. Особенность уравнения заключается в том, что ядро интегрального уравнения содержит в себе заданную функцию. Эта функция определяет закон движения точки нагрузки в нагруженном дифференциальном параболическом уравнении. Такого рода интегральные уравнения возникают при решении некоторых граничных задач для нагруженных дифференциальных параболических уравнений в неограниченной области.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра второго рода, граничные задачи для нагруженного дифференциального параболического уравнения, модифицированная функция Бесселя, неполная гамма-функция, обобщенная гипергеометрическая функция, символ Похгаммера.

При отыскании решений некоторых граничных задач для нагруженного дифференциального параболического уравнения естественным образом возникает необходимость исследования интегральных уравнений Вольтерра второго рода следующего вида:

$$\varphi(t) - \lambda \cdot \int_0^t K(t, \tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau = F(t), \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — числовой параметр уравнения; $F(t)$ — известная функция, определенная на промежутке $(0, \infty)$, ядро $K(t, \tau)$ интегрального уравнения (1) имеет вид:

$$K(t, \tau) = \frac{z^\beta}{2(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \int_0^\infty \xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{\xi \cdot z}{2(t-\tau)}\right) \cdot d\xi,$$

где $I_\beta(x)$ — модифицированная функция Бесселя; β — числовой параметр, причем $0 < \beta < 1$, $z = z(t) \in C(0, \infty)$ — заданная, принимающая положительные значения функция; $\varphi(t)$ — искомая функция.

Вычислим ядро $K(t, \tau)$ интегрального уравнения (1) и представим различные его интерпретации.

Принимая во внимание известное соотношение [1; 261], получим

$$K(t, \tau) = \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta+1)_k (t-\tau)^k} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\beta+1)$ — гамма-функция, $(\beta+1)_0 = 1$, $(\beta+1)_k = (\beta+1) \cdot \dots \cdot (\beta+k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ — символ Похгаммера.

Для функции $K(t, \tau)$ можно получить другое выражение, используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя [2]:

$$K(t, \tau) = \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \left[\frac{z^{2\beta}}{2^{2\beta} \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^\beta} + \frac{z^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2} \Gamma(\beta+2)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta+2; \frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \right], \quad (3)$$

где

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot \dots \cdot (a_p)_k}{(b_1)_k \cdot \dots \cdot (b_q)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

обобщенная гипергеометрическая функция, или

$$K(t, \tau) = \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \left[\frac{z^{2\beta}}{2^{2\beta} \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^\beta} + \frac{z^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2} \Gamma(\beta+2)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta+2)_k} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^k \right]. \quad (4)$$

Если для вычисления функции $K(t, \tau)$ применить известное соотношение [1; 273], то придем к следующему представлению ядра интегрального уравнения (1):

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4(t-\tau)}\right), \quad (5)$$

где

$$\gamma(v, x) = \int_0^x t^{v-1} \cdot e^{-t} dt$$

— неполная гамма-функция, или

$$K(t, \tau) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4(t-\tau)}\right), \quad (6)$$

где

$$\Gamma(v, x) = \int_x^{\infty} t^{v-1} \cdot e^{-t} dt$$

— дополнительная неполная гамма-функция.

Учитывая известное выражение для неполной гамма-функции [1; 641], представление (5) преобразуем к виду:

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \frac{z^2}{2^{2\beta} (t-\tau)^\beta} \cdot {}_1F_1\left(\beta; \beta+1; -\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right),$$

где

$${}_1F_1\left(\beta; \beta+1; -\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\beta+1)_k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^k = \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta+k) \cdot k!} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^k,$$

или

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{z^2}{2^{2\beta} (t-\tau)^\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta+k) \cdot k!} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^k. \quad (7)$$

Исходя из свойств неполной гамма-функции [1; 641], получим для функции $K(t, \tau)$ представление в виде

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[(\beta - 1) \cdot \gamma \left(\beta - 1, \frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) - \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta - 2} (t - \tau)^{1 - \beta} \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) \right]. \quad (8)$$

Соотношения (2)–(8) применяются при исследовании свойств ядра интегрального уравнения (1), а также могут быть использованы для исследования уравнения (1) при различных конкретно заданных функциях $z = z(t)$, так как эти представления получены в общем виде.

Ядро $K(t, \tau)$ интегрального уравнения (1) обладает следующими свойствами:

- 1) функция $K(t, \tau)$, $0 < \tau < t < \infty$, непрерывна;
- 2) функция $K(t, \tau) \geq 0$, $0 < \tau < t < \infty$;
- 3) для функции $K(t, \tau)$ справедлива оценка

$$K(t, \tau) \leq \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^\beta. \quad (9)$$

Действительно, из представления (5) для функции $K(t, \tau)$ получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \gamma \left(\beta, \frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{\frac{z^2}{4(t - \tau)}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^\beta \cdot \int_0^1 \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} x \right) \cdot x^{\beta - 1} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^\beta \cdot \int_0^1 x^{\beta - 1} dx = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^\beta \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^\beta. \end{aligned}$$

Оценку, аналогичную (9), можно получить также иным путем, используя представление (2) для функции $K(t, \tau)$ и учитывая, что

$$(\beta + 1)_k < k!$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 1)_k (t - \tau)^k} \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} < \\ &< \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^k = \\ &= \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) \cdot \exp \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) = \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta}; \end{aligned}$$

4) для функции $K(t, \tau)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &< \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta} \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta + 1}} \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta + 2} \exp \left(-\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) \pm \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta + 2}} \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{2\beta + 4}. \end{aligned}$$

В самом деле для представления (3) функции $K(t, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} {}_2F_2 \left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{z^2}{4(t - \tau)} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^k = 1 + \frac{z^2}{4(t - \tau)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t - \tau)} \right)^{k-1} = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{z^2}{4(t-\tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta+2)_{m+1}} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^m.$$

Так как $(\beta+2)_{m+1} > m!$, то

$$\begin{aligned} {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta+2; \frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) &= 1 + \frac{z^2}{4(t-\tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta+2)_{m+1}} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^m < \\ < 1 + \frac{z^2}{4(t-\tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)^m &= 1 + \frac{z^2}{4(t-\tau)} \cdot \exp\left(\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (10) получим из (3) для функции $K(t, \tau)$ искомое неравенство

$$\begin{aligned} K(t, \tau) < \frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^\beta} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta} \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) + \\ + \frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta+2} \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \pm \frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+2}} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta+4}; \end{aligned}$$

5) ядро $K(t, \tau)$ интегрального уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$\int_0^t K(t, \tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4t}\right) + \frac{z^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{z^2}{4t}\right) \right]. \tag{11}$$

Действительно, используя представление (5) для функции $K(t, \tau)$, вычислим интеграл

$$\int_0^t K(t, \tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^t \gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{\frac{z^2}{4(t-\tau)}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi.$$

После замены в последнем соотношении порядка интегрирования и необходимых вычислений приходим к искомому соотношению (11)

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t, \tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[\int_0^{\frac{z^2}{4t}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi \int_0^t d\tau + \int_{\frac{z^2}{4t}}^{\infty} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi \int_{t-\frac{z^2}{4\xi}}^t d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[\int_0^{\frac{z^2}{4t}} t \cdot e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi + \int_{\frac{z^2}{4t}}^{\infty} \frac{z^2}{4\xi} \cdot e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4t}\right) + \frac{z^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{z^2}{4t}\right) \right]; \end{aligned}$$

6) для ядра $K(t, \tau)$ интегрального уравнения (1) справедливо, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = 0. \tag{12}$$

В самом деле, переходя в (11) к пределу при $t \rightarrow 0$, получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4t}\right) + \frac{z^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{z^2}{4t}\right) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[t \cdot \frac{\gamma\left(\beta, \frac{z^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} + \frac{z^2}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\beta-1, \frac{z^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Данное соотношение для функции $K(t, \tau)$ можно получить более простым путем. Для этого вычислим предел $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau$, используя оценку (9),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\beta} \cdot \frac{1}{1-\beta} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (t-\tau)^{1-\beta} \Big|_0^t = 0. \end{aligned}$$

Так как ядро $K(t, \tau)$ обладает свойством (12), то для исходного интегрального уравнения можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Если $F(t) \in C(0, \infty)$, то интегральное уравнение (1) имеет и притом единственное непрерывное решение при любых значениях λ и при любой заданной непрерывной положительнозначной функции $z = z(t)$, $0 < t < \infty$.

Список литературы

- 1 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — Т. 2. Специальные функции. — М.: Физматлит, 2003. — 664 с.
- 2 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 972.

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева

Өзектің қасиеттері және бір Вольтерра интегралдық тендеуінің шешілуі

Мақалада өзегі берілген екінші текті Вольтерра интегралдық тендеуі қарастырылған. Тендеудің ерекшелігі — интегралдық тендеудің өзегі берілген функцияны қамтитындығы (алып жатады). Бұл функция жүктелген параболалық дифференциалдық тендеуде жүктеу нүктесінің қозғалыс заңын анықтайды. Осы тектес интегралдық тендеулер шенелмеген облыста салмақты параболалық дифференциалдық тендеулер үшін кейбір шектік есептер шешуде пайда болады.

A.N.Yesbayev, G.A.Yessenbayeva

About properties of the kernel and about solvability of one integral equation of Volterra

In this article we considered the integral equation of Volterra of the second kind with the given kernel. Peculiarity of this equation is that the kernel of the integral equation contains the given function. This function defines (determines) the law of motion of point of load in the loaded differential parabolic equation. Integral equations of this kind arise in the solution of some boundary value problems for the loaded differential parabolic equations in unlimited domain.

References

- 1 Prudnikov A.P., Brychrov Yu.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*. — Vol. 2. Special functions, Moscow: Fizmatlit, 2003, 664 p.
- 2 Gradshteyn I.S., Rygik I.M. *Tables of integrals, sums, rows and products*, Moscow: Fizmatgiz, 1963, p. 972.