

К.А.Турсунов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

Көлденең ығысуды ескеретін теория тұрғызылған. Негізгі қатыстар классикалық түрде алынған. Көлденең күш арқылы анықталатын тұралу моментінің формуласы ұсынылған. Пластинаның шеттері бос болған жағдайдағы шекаралық шарттар алынған. Көлденең ығысу арнайы параметр арқылы ескерілген. Пластинаны есептеу алгоритмі келтірілген.

The theory of a bend of a plate is constructed in view of cross-section shifts. The basic parities are received in the form of the classical theory. The formula for calculation of the twisting moment through cross-section force is offered. Boundary conditions for free edge of a plate are formulated. The account of cross-section shifts is carried out with the help of special parameter. It is resulted algorithms of calculation of a plate.

1. Основные соотношения и обозначения

Рассмотрим пластину (рис. 1) относительно декартовой системы координат ($0 \leq x_1 \leq \ell_1$; $0 \leq x_2 \leq \ell_2$; $-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$). На пластину по верхней грани $x_3 = \frac{h}{2}$ действует распределенная нагрузка $q(x_1, x_2)$, направленная сверху вниз. Нижнюю грань $x_3 = -\frac{h}{2}$ будем считать свободной. На боковых гранях $x_1 = 0; \ell_1$ и $x_2 = 0; \ell_2$ имеются различные закрепления.

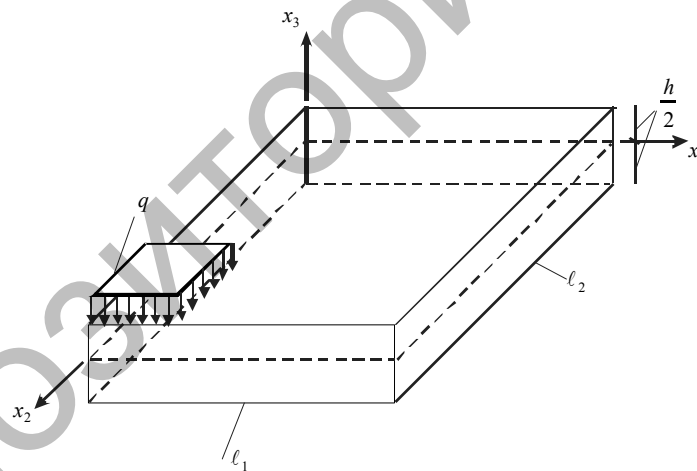


Рис. 1. Прямоугольная пластина

Для определения напряженно-деформированного состояния этой пластины будем пользоваться точными соотношениями пространственной теории упругости:

– уравнения равновесия в напряжениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_2 &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + X_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — компоненты нормальных напряжений, направленных вдоль координатных осей; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ — компоненты касательных напряжений (первый индекс означает направление, а второй — нормаль к сечению); X_1, X_2, X_3 — компоненты объемных сил;

– обобщенный закон Гука для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) - \frac{\nu_3}{E_3}\sigma_3; \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_e}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) - \frac{\nu_3}{E_3}\sigma_3; \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_3}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3}[\sigma_3 - \nu_3(\sigma_1 + \sigma_2)]; \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_3},\end{aligned}\quad (2)$$

где E, G, ν — модули продольной упругости и сдвига, а также коэффициент Пуассона в плоскости изотропии (x_1, x_2); E_3, G_3, ν_3 — то же самое в трансверсальном направлении (x_3);

– уравнения Коши (компоненты деформации)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2},\end{aligned}\quad (3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — линейные деформации, направленные по направлениям осей (x_1, x_2, x_3); $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ — угловые (сдвиговые) деформации, соответствующие касательным напряжениям (например, γ_{12} — уменьшение (увеличение) угла между положительными направлениями координатных осей x_1 и x_2); u_1, u_2, u_3 — компоненты перемещений, направленных по координатным осям;

– статические граничные условия для граней ($x_3 = \pm \frac{h}{2}$)

$$\text{при } x_3 = \frac{h}{2}: \tau_{13} = \tau_{23} = 0, \sigma_3 = q(x_1, x_2);$$

$$\text{при } x_3 = -\frac{h}{2}: \tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_3 = 0, \quad (4)$$

где $q(x_1, x_2)$ — интенсивность внешней нормальной распределенной нагрузки.

Имея эти соотношения, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в трансверсально-изотропном теле под действием внешних сил.

Перечисленные уравнения (1)–(3) содержат 15 неизвестных функций от трех переменных (x_1, x_2, x_3):

- шесть составляющих напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$;
- шесть составляющих деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$;
- три составляющие перемещения $u_1(x_1, x_2, x_3); u_2(x_1, x_2, x_3); u_3(x_1, x_2, x_3)$.

Таким образом, с математической точки зрения задача может быть решена путем интегрирования 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхностях пластины.

2. Основные гипотезы и компоненты перемещений

Проведение расчета трансверсально-изотропного тела с использованием всех соотношений теории упругости представляет собой трудную проблему. Для решения этой проблемы используют различные упрощения, основанные на гипотезах. С этой целью введем следующий параметр, связывающий три размера тела (рис. 1).

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}}. \quad (5)$$

Данный параметр изменяется в широких пределах $0 < \alpha \leq 1$.

Рассмотрим случай, соответствующий малому значению $\alpha \ll 1$, то есть размер h (толщина) намного меньше, чем размеры в плане. В виду малости этого параметра введем следующие гипотезы:

– линейная деформация (поперечная) в направлении оси x_3 отсутствует

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0; \quad (6)$$

– плоскость $x_3 = 0$ не испытывает никакой деформации

$$u_1(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2(x_1, x_2, 0) = 0; \quad (7)$$

– напряжение σ_3 в обобщенном законе Гука (2) отсутствует

$$\sigma_3 = 0; \quad (8)$$

– поперечные сдвиговые деформации изменяются по заданным законам

$$\gamma_{13} = f(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}; \quad \gamma_{23} = f(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}; \quad f(z) = 1 - 4z^2; \quad z = \frac{x_3}{h}, \quad (9)$$

где z — безразмерная поперечная координата; $\tilde{W}(x_1, x_2)$ — функция сдвиговых прогибов; $f(z)$ — закон изменения поперечных сдвигов по толщине h .

При отсутствии функции сдвиговых прогибов $\tilde{W}(x_1, x_2) = 0$ из (6)–(9) вытекает гипотеза Кирхгофа, используемая в расчетах тонких пластинок.

Первая гипотеза (6) позволяет определить компоненту перемещений в направлении оси x_3

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = W(x_1, x_2), \quad (10)$$

где $W(x_1, x_2)$ — функция прогибов пластины.

Интегрируя компоненты поперечных сдвиговых деформации (3), с учетом гипотез (7) и (9) находим компоненты тангенциальных перемещений

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -h \left[z \frac{\partial W}{\partial x_1} - \left(z - \frac{4}{3} z^3 \right) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} \right]; \quad (11)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -h \left[z \frac{\partial W}{\partial x_2} - \left(z - \frac{4}{3} z^3 \right) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} \right].$$

При $\tilde{W}(x_1, x_2) = 0$ из (11) вытекают компоненты перемещений классической (технической) теории изгиба пластин. Функция в круглой скобке (11) описывает искривление поперечного сечения за счет поперечных сдвигов.

3. Компоненты деформации и напряжений

На основании компонент перемещений (10) и (11) по формуле (3) определяем деформации

$$\varepsilon_1 = -h \left[z \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \varphi_0(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} \right]; \quad \gamma_{12} = -2h \left[z \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \varphi_0(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1 \partial x_2} \right];$$

$$\varepsilon_2 = -h \left[z \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \varphi_0(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} \right]; \quad \gamma_{13} = f(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}; \quad (12)$$

$$\varepsilon_3 = 0; \quad \gamma_{23} = f(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}; \quad f(z) = 1 - 4z^2 = \varphi_0'(z), \quad \varphi_0(z) = z - \frac{4}{3} z^3.$$

Отсюда видно, что компоненты тангенциальных деформаций состоят из двух частей: первая часть обусловлена функцией прогибов $W(x_1, x_2)$; вторая — функцией сдвиговых прогибов $\tilde{W}(x_1, x_2)$.

Подставив компоненты деформации (12) в обобщенный закон Гука (2), с учетом гипотезы (8) имеем компоненты напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\bar{E}h \left[z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) - \varphi_0(z) \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} \right) \right]; \\
\sigma_2 &= -\bar{E}h \left[z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) - \varphi_0(z) \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} \right) \right]; \\
\tau_{12} &= -\bar{E}(1-\nu)h \left[z \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \varphi_0(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1 \partial x_2} \right]; \text{ где } \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}; \\
\tau_{13} &= G_3 f(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1}; \tau_{23} = G_3 f(z) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2}; \\
\varepsilon_3 &= -\frac{\nu_3}{E_3} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\nu_3}{E_3} \bar{E}h(1+\nu) \left[z \nabla^2 W - \varphi_0(z) \nabla^2 \tilde{W} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где \bar{E} — обобщенный модуль продольной упругости.

Для определения компонент поперечных напряжений используем уравнение равновесия в напряжениях (1) при отсутствии компонент объемных сил. Внося в первое уравнение (1) σ_1 и τ_{12} из (13), имеем

$$\frac{\partial \tau_{13}}{h \partial z} = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = \bar{E}h \left[z \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) - \varphi_0(z) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}) \right].$$

Производя интегрирование по z , получим

$$\tau_{13} = \bar{E}h \left[C + \frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{3} z^4 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}) \right]. \tag{14}$$

Учитывая граничные условия (4), находим

$$\begin{aligned}
z = \pm \frac{1}{2}, \tau_{13} = 0 \Rightarrow 0 &= C + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) - \frac{5}{48} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}) \rightarrow \\
C &= -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) + \frac{5}{48} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}).
\end{aligned}$$

Внося полученное произвольное постоянное C в (14), определяем напряжение

$$\begin{aligned}
\tau_{13} &= -\frac{\bar{E}h^2}{8} \left[f(z) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) + \psi_0(z) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}) \right]; \\
\psi_0(z) &= -\frac{5}{6} + 4z^2 - \frac{8}{3} z^4, \text{ где } f(z) = 1 - 4z^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичным образом со второго уравнения (1) с учетом τ_{12} и σ_2 из (13) определяем

$$\tau_{23} = -\frac{\bar{E}h^2}{8} \left[f(z) \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W) + \psi_0(z) \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 \tilde{W}) \right]. \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в третье уравнение (1), получим

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = \frac{\bar{E}h^2}{8} \left[f(z) \nabla^2 \nabla^2 W + \psi_0(z) \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W} \right].$$

Производя интегрирование по z , имеем

$$\sigma_3 = \frac{\bar{E}h^3}{8} \left[B + \left(z - \frac{4}{3} z^3 \right) \nabla^2 \nabla^2 W + \left(-\frac{5}{6} z + \frac{4}{3} z^3 - \frac{8}{15} z^5 \right) \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W} \right]. \tag{17}$$

Учитывая граничные условия (4), находим произвольное постоянное B

$$\begin{aligned}
\text{при } z = -\frac{1}{2}; \sigma_3 = 0 \rightarrow 0 &= B - \frac{1}{3} \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{4}{15} \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W}; \\
B &= \frac{1}{3} \nabla^2 \nabla^2 W - \frac{4}{15} \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W}.
\end{aligned}$$

Внося его в (17), определяем напряжение

$$\sigma_3 = D \left[\delta(z) \nabla^2 \nabla^2 W + \delta_0(z) \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W} \right], D = \frac{\bar{E} h^3}{12}; \quad (18)$$

$$\delta(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - 2z^3, \delta_0(z) = -\frac{2}{3} - \frac{5}{4}z + 2z^3 - \frac{4}{5}z^5,$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины; $\delta(z)$ — функция распределения напряжения по классической теории; $\delta_0(z)$ — то же самое при учете поперечных сдвигов.

Далее из неиспользованного граничного условия (4) с учетом (18) получим уравнение, связывающее функции $W(x_1, x_2)$ и $\tilde{W}(x_1, x_2)$

$$\text{при } z = \frac{1}{2}, \sigma_3 = q(x_1, x_2) \rightarrow D \left[\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{4}{5} \nabla^2 \nabla^2 \tilde{W} \right] = q(x_1, x_2). \quad (19)$$

Данное уравнение при обозначении

$$W_0(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) - \frac{4}{5} \tilde{W}(x_1, x_2) \quad (20)$$

приобретает вид уравнения изгиба пластины по классической теории

$$D \nabla^2 \nabla^2 W_0 = q(x_1, x_2), \quad (21)$$

где $W_0(x_1, x_2)$ — функция прогибов пластины по классической теории пластин.

4. Углы поворотов нормали и внутренние усилия пластины

На основании компонент перемещений (11) и представления (20) можно определить углы поворотов нормали

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_1 x_3 dx_3 = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{4}{5} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} \right) = - \frac{\partial W_0}{\partial x_1}, \\ \theta_2 &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_2 x_3 dx_3 = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{4}{5} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial W_0}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где θ_1 — угол поворота нормали в направлении оси x_1 ; θ_2 — то же самое в направлении оси x_2 .

Учитывая (13) и (20), определяем внутренние усилия пластины

$$\begin{aligned} M_1 &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1 z dz = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} \right); \\ M_{12} &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{12} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ M_2 &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_2 z dz = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} \right); \\ Q_1^0 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{13} dz = G_3 A \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}; A = \frac{2}{3} h; \\ Q_2^0 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{23} dz = G_3 A \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (23)$$

где M_1, M_2 — изгибающие моменты, направленные вдоль координатных осей x_1 и x_2 ; M_{12} — крутящий момент относительно этих же осей; Q_1^0, Q_2^0 — поперечные силы, перпендикулярные координатным осям x_1 и x_2 ; A — приведенная площадь поперечного сечения в единицу ширины; $G_3 A$ — жесткость пластины при поперечном сдвиге.

Далее определим поперечные силы, соответствующие напряжениям (15) и (16), удовлетворяющим уравнениям равновесия в напряжениях

$$\begin{aligned} Q_1 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{13} dz = -\frac{\bar{E}h^3}{8} \frac{2}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) - \frac{4}{5} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \tilde{W}) \right] = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0); \\ Q_2 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{23} dz = -\frac{\bar{E}h^3}{8} \frac{2}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W) - \frac{4}{5} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 \tilde{W}) \right] = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Поперечные силы (Q_1^0, Q_2^0) и (Q_1, Q_2) будут одинаковыми

$$\begin{aligned} Q_1^0 &= Q_1 : G_3 A \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0); \\ Q_2^0 &= Q_2 : G_3 A \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0) \end{aligned}$$

при выполнении следующего условия:

$$\tilde{W}(x_1, x_2) = -\frac{D}{G_{13} A} \nabla^2 W_0 = -\frac{5}{4} \frac{D}{\mu_0 G_3 h} \nabla^2 W_0, \quad \mu_0 = \frac{5}{6}. \quad (25)$$

Откуда следует, что функция сдвиговых прогибов есть оператор Лапласа от функции прогибов классической теории, умноженной на отношения жесткостей пластины с обратным знаком.

5. Функции распределения перемещений и напряжений. Напряжения, выраженные через внутренние усилия

Компоненты перемещения (11) и напряжений (13), (15) и (18) выражаются через две функции $W(x_1, x_2)$ и $\tilde{W}(x_1, x_2)$. При этом имеют сложную структуру. Для их упрощения поступаем следующим образом.

Внося (25) в (20), определяем функцию прогибов пластины с учетом поперечных сдвигов, выраженную через функцию классической теории

$$W(x_1, x_2) = W_0 - \frac{D}{\mu_0 G_3 h} \nabla^2 W_0 = \beta \cdot W_0(x_1, x_2); \beta = 1 - \frac{D}{\mu_0 G_3 h} \frac{\nabla^2 W_0}{W_0}, \quad (26)$$

где β — параметр, учитывающий поперечные сдвиги. При $G_3 \rightarrow \infty$ имеет место $\beta = 1$. Подставив (25) и (26) в (11), с учетом (22) получим компоненты перемещений в форме классической теории пластины

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -h \varphi_*(z) \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = h \varphi_*(z) \theta_1; \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -h \varphi_*(z) \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = h \varphi_*(z) \theta_2; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\varphi_*(z) = z - \frac{D}{\mu_0 G_3 h} \left(-\frac{z}{4} + \frac{5}{3} z^3 \right) \frac{\nabla^2 W_0}{W_0} = z + (\beta - 1) \left(-\frac{z}{4} + \frac{5}{3} z^3 \right),$$

где $\varphi_*(z)$ — функция распределения тангенциальных перемещений по толщине пластины.

Далее проделав такую же операцию для напряжений из (13), с учетом (23) получим компоненты для тангенциальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\bar{E}h \varphi_*(z) \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} \right) = \frac{12}{h^2} \varphi_*(z) M_1; \\ \sigma_2 &= -\bar{E}h \varphi_*(z) \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} \right) = \frac{12}{h^2} \varphi_*(z) M_2; \\ \tau_{12} &= -\bar{E}h(1-\nu) \varphi_*(z) \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{12}{h^2} \varphi_*(z) M_{12}. \end{aligned} \quad (28)$$

Прежде чем получить компоненты поперечных напряжений представим функцию сдвиговых прогибов (25) с учетом (26) в таком виде:

$$\tilde{W}(x_1, x_2) = \frac{5}{4}(\beta - 1) \cdot W_0(x_1, x_2). \quad (29)$$

Теперь внося (26) и (29) в выражения (15), (16) и (18), с учетом (21) и (24) получим компоненты поперечных напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= -\frac{Eh^2}{8} \psi_*(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0) = \frac{3}{2} \psi_*(z) \frac{Q_1}{h}; \\ \tau_{23} &= -\frac{Eh^2}{8} \psi_*(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0) = \frac{3}{2} \psi_*(z) \frac{Q_2}{h}; \\ \sigma_3 &= D\delta_*(z) \nabla^2 \nabla^2 W_0 = \delta_*(z) q(x_1, x_2); \\ \psi_*(z) &= \beta f(z) + \frac{5}{4}(\beta - 1) \psi_0(z); \\ \delta_*(z) &= \beta \delta(z) + \frac{5}{4}(\beta - 1) \delta_0(z), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\delta_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, определяемые согласно (15) и (18); $\psi_*(z)$, $\delta_*(z)$ представляют собой функции распределения поперечных касательных и нормальных напряжений по толщине пластины.

6. Параметр поперечного сдвига и линейная поперечная деформация

Рассмотрим вопрос определения параметра поперечного сдвига по формуле (26). Данный параметр наряду с жесткостными характеристиками D и $G_3 h$ зависит от функции прогибов по классической теории W_0 , что противоречит смыслу данного параметра. Для устранения указанного противоречия воспользуемся следующим уравнением относительно функции прогибов W_0 :

$$\nabla^2 W_0 + K^2 W_0 = 0, \quad (31)$$

где K — собственное число, подлежащее определению.

На основании (31) параметр (26), входящий во все расчетные формулы, запишется в виде

$$\beta = 1 - \frac{D}{\mu_0 G_3 h} \frac{\nabla^2 W_0}{W_0} = 1 + \frac{DK^2}{\mu_0 G_3 h}; \mu_0 = \frac{5}{6}. \quad (32)$$

Чтобы определить параметр K^2 , представим функцию W_0 в виде

$$W_0(x_1, x_2) = \hat{W} \cdot X(x) \cdot Y(y), x = \frac{x_1}{\ell_1}, y = \frac{x_2}{\ell_2}, \quad (33)$$

где \hat{W} — амплитудное значение прогиба; x, y — безразмерные координаты.

Подставив (32) в (31), получим

$$K^2 = -\left(\frac{1}{\ell_1^2} \frac{X''}{X} + \frac{1}{\ell_2^2} \frac{Y''}{Y} \right).$$

При выполнении уравнений

$$X''(x) = -K_1^2 X(x); \quad Y''(y) = -K_2^2 Y(y) \quad (34)$$

данный параметр приобретает вид

$$K^2 = \frac{K_1^2}{\ell_1^2} + \frac{K_2^2}{\ell_2^2}. \quad (35)$$

Определим решение $X(x) = C_1 \cos K_1 x + C_2 \sin K_1 x$ первого уравнения (34) для следующих вариантов.

Вариант 1. Концы горизонтального сечения закреплены. В этом случае выполняются условия

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0; \quad (36)$$

$$X(\ell_1) = 0 \rightarrow 0 = C_2 \sin K_1 \ell_1 \rightarrow K_1 = \pi, C_2 = X_0.$$

Решение имеет вид $X(x) = X_0 \sin \pi x$.

Вариант 2. Один конец закреплен, а другой — свободен. В этом случае выполняются условия

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0; \quad (37)$$

$$X(1) = 1, C_2 = X_0 \rightarrow 1 = \sin K_1 \rightarrow K_1 = \frac{\pi}{2},$$

следовательно, решение приобретает следующий вид: $X(x) = X_0 \sin \frac{\pi x}{2}$.

Вариант 3. Концы горизонтального сечения свободные.

В этом случае выполняются условия

$$X(0) = X_0 \rightarrow C_1 = X_0;$$

$$X(1) = X_0 \rightarrow C_2 = \frac{(1 - \cos K_1)}{\sin K_1}; \quad (38)$$

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = 2X_0 \rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \frac{K_1}{2}} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Решение задачи имеет вид

$$X(x) = X_0 \left\{ \cos \frac{2\pi x}{3} + \frac{(1 - \cos K_1)}{\sin K_1} \sin \frac{2\pi x}{3} \right\}.$$

Аналогичным образом находится решение второго уравнения (34). На основании (36)–(38) можно записать

$$K_1 = m_i \pi, m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = \frac{2}{3}, \quad (39)$$

где i — номер варианта.

Таким же образом записываем параметр собственного значения второго уравнения (34)

$$K_2 = n_j \pi, n_1 = 1, n_2 = \frac{1}{2}, n_3 = \frac{2}{3}. \quad (40)$$

Учитывая (39) и (40), представим основной параметр (35) в виде

$$K_2 = \frac{\beta_0}{\ell_1 \ell_2}, \beta_0 = \pi^2 \left[\frac{\ell_2}{\ell_1} m_i^2 + \frac{\ell_1}{\ell_2} n_i^2 \right]. \quad (41)$$

На основании (5) и (41) запишем параметр поперечного сдвига (32) в окончательном виде

$$\beta = 1 + \frac{\beta_0 \alpha^2 \bar{E}}{12\mu_0 G_3}, \mu_0 = \frac{5}{6}, \alpha = \frac{h}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}}, \quad (42)$$

где α — параметр, зависящий от размеров пластины (5); β_0 — параметр, зависящий от типа граничных условий пластины (41); μ_0 — коэффициент, зависящий от распределения касательных напряжений по толщине пластины.

Линейная поперечная деформация определяется по закону Гука (2) на основании (28) и (30)

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \left\{ \delta_*(z) q - \nu_3 \frac{12}{h^2} \varphi_*(z) (M_1 + M_2) \right\}, \quad (43)$$

где q — интенсивность внешней распределенной нагрузки; M_1, M_2 — изгибающие моменты в направлении координатных осей x_1 и x_2 .

7. Граничные условия. Алгоритм расчета пластины

При решении уравнения (21) появляются произвольные постоянные, которые необходимо определить из граничных условий относительно функций $W_0(x_1, x_2)$.

На основании углов поворотов (22) и внутренних усилий (23) и (24) можно составить граничные условия, соответствующие креплениям контура пластины.

Основными видами граничных условий для краев пластины $x_1 = 0, \ell_1$ являются

– шарнирно опертые

$$W_0 = 0, M_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} = 0, \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \quad (44)$$

– заземленные

$$W_0 = 0, \theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0, \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \quad (45)$$

– упругоопертые

$$\theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0, M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} \right) = 0, M_{12} = 0; \quad (46)$$

– свободные

$$Q_1 = 0, M_1 = 0, M_{12} = 0. \quad (47)$$

Из анализа граничных условий (44)–(46) вытекает, что третье условие является следствием первого. Относительно (47) этого сказать нельзя.

В свое время Кирхгоф, критикуя Пуассона, вводя обобщенную силу путем объединения поперечной силы с крутящим моментом, привел три условия (47) к двум условиям относительно изгибающего момента и поперечной силы.

Нам предстоит по-другому преобразовать условия (47).

Для этой цели запишем (24) с учетом (31) в таком виде:

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0) = DK^2 \frac{\partial W_0}{\partial x_1};$$

$$Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0) = DK^2 \frac{\partial W_0}{\partial x_2}.$$

Продифференцируя их и учитывая выражение крутящего момента (23), имеем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = DK^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{K^2}{(1-\nu)} M_{12};$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} = DK^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{K^2}{(1-\nu)} M_{12}. \quad (48)$$

На основании известного параметра (41) из (48) выразим крутящий момент через поперечную силу

$$M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{\beta_0} \ell_1 \ell_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}, M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{\beta_0} \ell_1 \ell_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}, \quad (49)$$

где первое выражение используется при вычислении крутящего момента для свободного края по оси x_2 , а второе — для свободного края по оси x_1 .

Подставив первое выражение (49) в (47), убеждаемся в том, что третье условие является следствием первого.

Таким образом, полученные граничные условия (44)–(47) не противоречат порядку основного уравнения (21) и тем самым нет необходимости введения обобщенной поперечной силы.

Следует отметить, что крутящий момент для пластины со свободными краями вычисляется по (49), а не по (23).

Реализация теории осуществляется следующим образом (алгоритм расчета пластины):

- 1) определяется функция прогибов $W_0(x_1, x_2)$ из решения уравнения (21) путем удовлетворения одного варианта граничных условий (44)–(47);
- 2) находятся внутренние условия пластины ($M_1, M_{12}, M_2, Q_1, Q_2$) по (23) и (24);
- 3) определяется параметр β_0 по (41) с учетом (39) и (40) в зависимости от типа закреплений пластины;
- 4) вычисляется параметр поперечного сдвига β по формуле (42);
- 5) определяются функции распределения напряжений $\varphi_*(z), \psi_*(z), \delta_*(z)$ на основании формул (27) и (30);
- 6) находятся компоненты перемещений (W, u_1, u_2) согласно (26) и (27);
- 7) определяются компоненты напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3$) с помощью формул (28) и (30);
- 8) вычисляется линейная поперечная деформация (43).

Таким образом, предлагаемая теория позволяет производить расчеты трансверсально-изотропных пластинок в широком диапазоне с использованием готовых результатов соответствующих пластин по классической теории.

В заключение отметим, что в работе [1] приведен краткий обзор по теории пластин. Обстоятельно проанализированы теории Тимошенко и Рейсснера-Миндлина. Осуществлен вывод разрешающего уравнения уточненной теории, учитывающей поперечные сдвиги относительно двух функций. Построенная в ней теория изгиба пластин сводится к двум уравнениям, имеющим в совокупности шестой порядок.

Предлагаемая теория отличается от теорий, приведенных в [1], тем, что разрешающее уравнение имеет четвертый порядок и позволяет проводить расчеты пластин со свободными краями. К достоинствам этой теории можно отнести использование готовых результатов классической теории при расчете пластин с учетом поперечных сдвигов.

Следует отметить, что в работе [2] приведены другие уточненные теории пластин, позволяющие учесть не только поперечные сдвиги, но и обжатие и давление слоев.

Список литературы

1. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Механика твердого тела. — М., 1992. — № 3. — С. 26–47.
2. *Тұрсынов К.А., Тұрсынов Д.К.* Конструкциялардың кеңістік элементтерін есептеу негіздері: Оқу құралы. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2007. — 215 б.