3. *Zeldovich I.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Mahviladze G.M.* Mathematical theory of burning and explosion. — M.: Science, 1980.
4. *Verwer J.G., Blom J.G., Sanz-Serna J.M.* An adaptive moving grid method for one-dimensional systems of partial differential equations // J.Comput. Phys. — 1989. — Vol. 82. — №. 2.
5. *Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I., Barahnin V.B., Shokina N.Y.* Numerical modeling of currents of a liquid with superficial waves. — Novosibirsk: Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2001. — 394 p.

УДК 510–67 — 519.24, 519.6

О метриках для высказываний экспертов с вероятностями с привлечением моделей теории

Setting metric's for expert statements with probabilities applied models theory

Викентьев А.А.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Россия (E-mail: orumbayevan@mail.ru)

Ықтималдықтары бар тұжырымдар есептеу формулаларымен берілген, эксперттер тұжырымдарына теория модельдерін қолданып, метриканы енгізу әдістері ұсынылды. Эксперттi жүйелер мен білім базасын құруда, кластеризациялауда және эксперттердің ықтималды тұжырымдарын келістіру есептерінің шешімін табуда зерттеу қажет. Нәтижелер шексіз тасымалды формулаларға енгізіледі.

The paper discusses probabilities' logical expert statements represented as the formulas of Sentence Logic. Methods for setting metrics on such formulas are offered and the entered metric's properties are investigated. The research can be applied to solving the problems of the best reconciliation of expert statements, to constructing the decision functions in pattern recognition and building the expert systems.

Введение. В настоящее время проявляется все больший интерес к анализу экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний экспертов, интересны исследования о высказываниях экспертов, представленных формулами исчисления высказываний с вероятностями. Возникают задачи об алгоритмах распознавания закономерностей, согласования логических (экспертных) знаний и их кластеризации [1–6]. Для этого необходимы метрики на знаниях. В работе рассматриваются логические высказывания экспертов, представленные формулами исчисления высказываний (ИВ) с вероятностями. Вопросами введения расстояний на высказываниях экспертов и их использовании занимаются профессор Г.С.Лбов [2], д.т.н. В.Б.Бериков [5, 6] и профессор Н.Г.Загоруйко. Для формул ИВ без вероятностей были введены различные метрики в [2–4].

В данной работе предлагаются способы задания расстояний на формулах-высказываниях с вероятностями с привлечением моделей теории, характеризующей изучаемую область. Устанавливаются свойства введенных расстояний. Для решения этой задачи используются вероятностный и теоретико-модельный подходы [2–5,7]. Результаты неоднократно доложены на международных конференциях в 2009, 2010 гг., в том числе на юбилейной конференции к 100-летию акад. Анатолия Ивановича Мальцева — выдающегося логика и алгебраиста, крупного ученого по алгебре, теории моделей, алгоритмам, нумерации, алгоритмическим проблемам и применениям методов математической логики.

Основные определения. Будем рассматривать знания экспертов, представленные формулами ИВ с вероятностями (вероятностные высказывания), т.е. высказывания вида «φ с вероятностью p_φ», где φ — формула ИВ. Используем записи для различных таких высказываний:

$$B_i = \rangle\varphi, p_\varphi\langle\,,\ B_j = \rangle\psi, p_\psi\langle\,.$$

Пусть Σ — база знаний, состоящая из формул ИВ (в Σ содержатся все формулы, с которыми будут работать эксперты). Можно предполагать в дальнейшем, что Σ конечно, хотя это и не обязательно, но к этому случаю все сводится. $S(\varphi)$ — носитель формулы φ, т.е. множество элементарных высказываний, используемых при написании формулы φ. $S(\Sigma)=\bigcup_{\varphi\in\Sigma} S(\varphi)$ — носитель совокупности базы знаний.

Рассмотрим совокупность $P(S(\Sigma))=2^{S(\Sigma)}$ — множество всевозможных подмножеств множества $S(\Sigma)$. Элементы множества $P(S(\Sigma))$ называются моделями. Известно, что $\left|P(S(\Sigma))\right|=2^{|S(\Sigma)|}=n$ (для простоты обозначения). Более подробно об используемой в статье теории моделей можно узнать в [2–4], и она переносится на модели рассматриваемой теории. Далее *n* будем использовать и для числа подмножества моделей, которые используются для нахождения числа моделей, на которых формула принимает истинное значение.

Пусть эксперты говорят о вероятностях (частоты) формул на множестве n моделей некоторой теории, и каждое высказывание присутствует только с одной вероятностью. В случае нескольких вероятностей можно применить согласование экспертных знаний. Если же согласовать не удается, то работать придется по отдельным значениям вероятностей, параллельно, а затем также усреднять результаты.

Тогда будем интерпретировать вероятность, данную экспертом, следующим образом: $B=\rangle\varphi,p_\varphi\langle$ означает, что высказывание φ истинно на $n_\varphi=\left[n\cdot p_\varphi\right]$ моделях, где n — конечное число взятых моделей. Конечно, предполагаем, что рассматриваемые нами модели удовлетворяют неполной теории и эксперты согласны с такой интерпретацией формул и их вероятностей. В худшем случае не имеют возражений к такому частотному подходу.

Пусть нам дано два вероятностных логических высказывания $B_i=\rangle\varphi,p_\varphi\langle$ и $B_j=\rangle\psi,p_\psi\langle$, и надо задать способ вычисления расстояния $\rho(B_i,B_j)$ между такими высказываниями.

Расстояние на формулах ИВ с вероятностями и свойства расстояний. Интерпретируя данные экспертами вероятности описанным выше способом, получаем, что высказывание φ истинно на $n_\varphi=\left[n\cdot p_\varphi\right]$ моделях, высказывание ψ истинно на $n_\psi=\left[n\cdot p_\psi\right]$ моделях.

Отметим, однако, при таком подходе, вообще говоря, мы не знаем, на каких именно моделях каждое высказывание истинно, а также сколько имеется моделей, на которых эти высказывания истинны одновременно.

Будем решать такую задачу: пусть высказывание φ истинно на n_φ моделях, высказывание ψ истинно на n_ψ моделях и k — число моделей, на которых эти высказывания истинны одновременно. Тогда как вычислить расстояние между высказываниями $B_i=\rangle\varphi,p_\varphi\langle$ и $B_j=\rangle\psi,p_\psi\langle$?

Обозначим рассматриваемые далее расстояния через $\rho_k(B_i,B_j)$, где $k=0,1,2,\ldots,\min(n_\varphi,n_\psi)$.

Как и раньше [2–4], при фиксированном k расстояние $\rho_k(B_i,B_j)$ определим через нормированную симметрическую разность, т.е. $\rho_k(B_i,B_j)=\dfrac{n_\varphi-k+n_\psi-k}{n}=\dfrac{n_\varphi+n_\psi-2k}{n}$, для каждого $k=0,1,2,\ldots,\min(n_\varphi,n_\psi)$.

В следующей теореме формулируются и доказываются свойства расстояний на высказываниях с вероятностями при оговоренных выше предположениях.

Теорема 1. Для расстояний $\rho_k(B_i,B_j)$ справедливы свойства

$$0\le\rho_k(B_i,B_j)\le 1;$$

$$\rho_k(B_i,B_j)=\rho_k(B_j,B_i);$$

$$\rho_k(B_i,B_j)\le\rho_k(B_i,B_s)+\rho_k(B_s,B_j);$$

$$B_i\equiv B_j\Leftrightarrow\rho_k(B_i,B_j)=0;$$

$$(B_i\equiv B_j\Leftrightarrow\varphi\equiv\psi\ \text{И}\ p_\varphi=p_\psi,$$

это означает, что формулы φ и ψ истинны на одних и тех же моделях и имеют одинаковые вероятности.

$$B_i \equiv {}^{\neg}B_j \Leftrightarrow \rho_k(B_i, B_j) = 1;$$

$$\rho_k(B_i, B_j) = 1 - \rho_k(B_i, {}^{\neg}B_j) = \rho_k({}^{\neg}B_i, {}^{\neg}B_j);$$

$$\rho_k(B_i, B_j) = \rho_k(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j).$$

Доказательство свойств 1 и 2 не вызывает трудностей.

Докажем неочевидное свойство 3. Определение $\rho_k(B_i, B_j)$ можно переписать следующим образом: $\rho_k(B_i, B_j) = \dfrac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = \dfrac{n_{\varphi\Delta\psi}}{n} = \dfrac{n_{(\neg\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\neg\psi)}}{n}$ (по определению нормированной симметрической разности). Тогда для произвольного высказывания $B_s = \rangle\chi, p_\chi\langle$ нетрудно доказывается, что $n_{\varphi\Delta\psi} \le n_{\varphi\Delta\chi} + n_{\chi\Delta\psi}$. Тогда $\rho_k(B_i, B_j) = \dfrac{n_{\varphi\Delta\psi}}{n} \le \dfrac{n_{\varphi\Delta\chi}}{n} + \dfrac{n_{\chi\Delta\psi}}{n} = \rho_k(B_i, B_s) + \rho_k(B_s, B_j)$.

Докажем также свойство 4. Докажем сначала (необходимость) слева направо ($\Rightarrow$). Если $B_i \equiv B_j$, то $\varphi \equiv \psi$ и, значит, $n_\phi = n_\psi = k$. Следовательно, $\rho_k(B_i, B_j) = \dfrac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = 0$.

Докажем теперь (достаточность) в обратную сторону ($\Leftarrow$). Если $\rho_k(B_i, B_j) = 0$, то $n_\varphi + n_\psi - 2k = 0$. Так как k может принимать значения $0,1,2,\ldots,\min(n_\varphi, n_\psi)$, то $(n_\varphi + n_\psi - 2k = 0 \Leftrightarrow n_\varphi = n_\psi = k)$. Следовательно, $\varphi \equiv \psi$ и, значит, $B_i \equiv B_j$.

Докажем свойство 5. Докажем ($\Rightarrow$). Если $B_i \equiv {}^{\neg}B_j$, то $\varphi \equiv {}^{\neg}\psi$. Тогда $n_\varphi = n - n_\psi$ и $k = 0$, следовательно,

$$\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 0}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Докажем ($\Leftarrow$). Если $\rho_k(B_i, B_j) = 1$, то $n_\varphi + n_\psi - 2k = n$. Так как k может принимать значения $0,1,2,\ldots,\min(n_\varphi, n_\psi)$, то $(n_\varphi + n_\psi - 2k = n \Leftrightarrow n_\varphi + n_\psi = n$ и $k = 0)$. Следовательно, $\varphi \equiv {}^{\neg}\psi$ и $B_i \equiv {}^{\neg}B_j$.

Докажем свойство 6. Так как $\rho_k(B_i, B_j) = \dfrac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$, рассмотрим

$$\rho_k(B_i, {}^{\neg}B_j) = \frac{n_\varphi + n_{\neg\psi} - 2(n_\varphi - k)}{n} = \frac{n_\varphi + (n - n_\psi) - 2(n_\varphi - k)}{n} =$$

$$= \frac{n - n_\varphi - n_\psi - 2k}{n} = 1 - \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = 1 - \rho_k(B_i, B_j).$$

Нетрудно доказывается, что $1 - \rho_k(B_i, {}^{\neg}B_j) = \rho_k({}^{\neg}B_i, {}^{\neg}B_j)$.

Докажем свойство 7. Легко, простыми вычислениями, доказать, что $n_{(\varphi\wedge\psi)\Delta(\varphi\vee\psi)} = n_{\varphi\Delta\psi}$. Тогда

$$\rho_k(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j) = \frac{n_{(\varphi\wedge\psi)\Delta(\varphi\vee\psi)}}{n} = \frac{n_{\varphi\Delta\psi)}}{n} = \rho_k(B_i, B_j).$$

В случае, когда известно k, нужное расстояние найдено. Когда это значение k неизвестно, предложим несколько других способов вычисления расстояния $\rho(B_i, B_j)$ между вероятностными высказываниями $B_i = \rangle\varphi, p_\varphi\langle$ и $B_j = \rangle\psi, p_\psi\langle$.

Так как нам неизвестно число k (число моделей, на которых высказывания φ и ψ истинны одновременно) и нет никаких предпочтений для значения k (хотя оно и может быть высказано экспертами), то можем, например, поступить следующим образом.

Предполагая, что для нас все значения числа k равновероятны, расстояние между вероятностными высказываниями $B_i = \rangle\varphi, p_\varphi\langle$ и $B_j = \rangle\psi, p_\psi\langle$ определим как усреднение расстояний $\rho_k(B_i, B_j)$ по всем значениям k, т.е. $\rho(B_i, B_j) = \dfrac{\sum_{k=0}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j)}{\min(n_\varphi, n_\psi) + 1}$.

Для этого расстояния также справедлива теорема 1, и под знаком суммы слагаемые в числителе можно взять с весами (учтя, например, согласованные мнения экспертов).

Если же экспертами указано, какое значение k предпочтительнее, то в качестве $\rho(B_i, B_j)$ берем расстояние $\rho_k(B_i, B_j)$. Это так, когда мы знаем, что пересечение состоит из k моделей.

Можно подойти к этому вопросу с вероятностно-статистической точки зрения. Для каждого натурального k вычислить частоту того, что высказывания φ и ψ одновременно истинны на k моделях.

Найдем частоту (вероятность) p_k того, что в выбранных n_φ моделях и n_ψ моделях (они выбираются из n моделей) будут k модели, на которых высказывания φ и ψ истинны одновременно, где $k = 0,1,2,\dots,\min(n_\varphi, n_\psi)$.

Сначала определим вероятностное пространство $\rangle\Omega, \mathrm{A}, p\langle$, где Ω — пространство элементарных исходов-моделей; $\Omega 1 = \{0,1,2,\dots,\min(n_\phi, n_\psi)\}$ — число возможных совпадений моделей в наборах из n_φ и n_ψ моделей; A — система пар подмножеств множества моделей Ω, образующая σ — алгебру событий и p — вероятность на $\rangle\Omega, \mathrm{A}\langle$. Определим на декартовом произведении $\Omega 1 \times A$ случайную величину ξ, зависящую от i и j: $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j)$ для $k = 0,1,2,\dots,\min(n_\varphi, n_\psi)$, т.е. функция ξ каждому k из Ω ставит в соответствие конечное число–расстояние $\rho_k(B_i, B_j)$.

Вероятность этого события (появление расстояния с пересечением k) на классе из n моделей можно вычислить так:

$$p_k = \frac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}},$$

где $C_n^{n_\varphi}$ — число способов выбрать n_φ моделей из n моделей.

Действительно, так как любой набор, состоящий из n_φ моделей, может сочетаться с любым набором, состоящим из n_ψ моделей, значит, число $(C_n^{n_\varphi} \cdot C_n^{n_\psi})$ — количество всех способов выбрать два набора, один из которых состоит из n_φ моделей, а другой — из n_ψ моделей.

Выбрать k модели, которые будут общими в этих наборах, из n моделей можно C_n^k способами. Тогда остальные $(n_\varphi - k)$ и $(n_\psi - k)$ модели в наборах должны быть дизъюнктными. Следовательно, остальные $(n_\varphi - k)$ модели для пополнения набора, состоящего из k до n_ϕ моделей, можно выбрать $C_{n-k}^{n_\varphi - k}$ способами, а $(n_\psi - k)$ модели — для получения набора, состоящего из n_ψ моделей, с учетом наших предположений, — $C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}$ способами. Итак, имеется всего $\left(C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}\right)$ способов выбрать два набора, один из которых состоит из n_φ моделей, а другой из n_ψ, и в точности k модели в этих наборах моделей совпадают. Поэтому вероятность того, что k модели совпадут в наборах из n_φ и n_ψ элементных моделей, будет равна $p_k = \dfrac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}}$. В результате получаем, что расстояния $\rho_k(B_i, B_j) = \dfrac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$ будут появляться с вероятностями $p_k = \dfrac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}}$, где $k = 0,1,2,\dots,\min(n_\varphi, n_\psi)$.

Предлагается эти вероятности (или близкие к ним числа) использовать в качестве весов (коэффициентов) расстояний для получения результирующего расстояния для данных формул с вероятностями. Подробнее об этом будет дальше. Заметим, что при таком подходе главную роль играют не сами формулы, а числа, определяющие количество моделей и их пересечения. Не имея другой информации, мы рассмотрели все возможные подмножества для подсчета частоты (вероятности) появления расстояния для конкретного k. Используя свойство инвариантности расстояний между формулами и вероятностей высказываний (формул) [2–4], можно рассчитать аналогичными выкладками, но с меньшим носителем знаний, включающим те модели от элементов, которые встречаются в двух формулах, для которых и ищется расстояние. Будем считать, что мы так сделали с самого начала. И тогда это является оптимальным подсчетом.

Зная вероятности p_k для каждого расстояния $\rho_k(B_i, B_j)$, в качестве расстояния между вероятностными высказываниями $B_i = \rangle\varphi, p_\varphi\langle$ и $B_j = \rangle\psi, p_\psi\langle$ можно взять, например, наиболее вероятное $\rho(B_i, B_j) = \rho_m(B_i, B_j)$, где $p_m = \max\limits_k p_k$. Для такого $\rho(B_i, B_j)$ тоже справедлива теорема 1.

Для получения других расстояний можно взять усредненное для некоторых выбранных подмножеств расстояний из всех полученных возможных расстояний.

Более общо, беря произвольные веса p_k (исходя из экспертных оценок или дополнительных сведений экспертов, которые могут и не совпадать!) для расстояний $\rho_k(B_i, B_j)$ так, чтобы получался закон распределения, получим общий случай для адаптивного поиска нужного расстояния между формулами с вероятностями.

Тогда в качестве расстояния между вероятностными высказываниями $B_i = \rangle\varphi, p_\varphi\langle$ и $B_j = \rangle\psi, p_\psi\langle$ можно взять величину, равную математическому ожиданию (центру тяжести) или среднему значению случайной величины ξ, т.е. $\rho(B_i, B_j) = M\xi = \sum\limits_{k=0}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j)\cdot p_k$. Для введенного расстояния справедлива следующая

Теорема 2. Для расстояния $\rho(B_i, B_j)$ справедливы свойства

$$0 \le \rho(B_i, B_j) \le 1;$$

$$\rho(B_i, B_j) = \rho(B_j, B_i);$$

$$\rho(B_i, B_j) \le \rho(B_i, B_s) + \rho(B_s, B_j).$$

Если $\rho(B_i, B_j) = 0$, то $B_i \equiv B_j$.

$$\rho(B_i, B_j) = 1 - \rho(B_i, \neg B_j) = \rho(\neg B_i, \neg B_j).$$

$$\rho(B_i, B_j) = \rho(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j).$$

Доказательство. Докажем сначала неочевидное свойство 3. Для расстояний $\rho_k(B_i, B_j)$ на $\rho_k(B_i, B_j)$ по свойству 3 теоремы 1 имеем $\rho_k(B_i, B_j) \le \rho_k(B_i, B_s) + \rho_k(B_s, B_j)$. Тогда по свойствам математического ожидания а) $\xi \le \eta \Rightarrow M\xi \le M\eta$, б) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ получаем требуемое свойство для расстояния.

Докажем свойство 4. Пусть $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j) \ge 0$ и $M\xi = 0$. Тогда по свойству математического ожидания $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j) = 0$ с вероятностью, равной 1. Тогда по свойству 4 теоремы 1 будет $B_i \equiv B_j$.

Докажем свойство 5. Так как для расстояния $\rho_k(B_i, B_j)$ по свойству 6 теоремы 1 справедливо равенство $\rho_k(B_i, B_j) = 1 - \rho_k(B_i, \neg B_j) = \rho_k(\neg B_i, \neg B_j)$, тогда по свойствам математического ожидания а) если $p(\xi = \eta) = 1$ и $\exists M\xi$ (существует м.о.), то $M\xi = M\eta$; б) $M(a + b\xi) = a + bM\xi$ получаем требуемое свойство для расстояния $\rho(B_i, B_j)$.

Отметим, что для выбора коэффициентов-весов в формуле результирующего расстояния можно также использовать метод наименьших квадратов, имея в наличии расстояния для конкретных формул.

Заключение. В работе предложены способы введения метрик на классах эквивалентных высказываний экспертов, заданных формулами ИВ с вероятностями. Исследование необходимо для решений задач согласования вероятностных высказываний экспертов, кластеризации и для построения баз знаний и экспертных систем. Результаты переносятся на формулы над бесконечными носителями и формулы с переменными языка 1-го порядка с использованием измеримых подклассов (для фиксированной теории) измеримых (в том числе и метрических) моделей.

References

1. *Bloschicyn V.YA., Lbov G.S.* About measure of information of logical phrases // Reports of the Republican School-Seminar // Technology of the development of the expert systems. — Kishinev, 1987. — P. 12–14.
2. *Lbov G.S., Starceva N.G.* Logical solving functions and questions to statistical stability of the decisions. — Novosibirsk: Publishers of the Institute mathematicians, 1999.
3. *Vikentiev A.A., Lbov G.S.* Setting the metric and in formativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1997. — Vol. 7 (2).
4. *Vikentiev A.A., Lbov G.S.* About measures of information of the boolean algebra of the offers and information of utterances experts. // Reports by WOUNDS. — 1998. — Vol. 361 (2).
5. *Berikov V.B.* The Cluster analysis with use the group tree decisions // Scientific herald NGTU. — 2009. — 3 (36).
6. *Lbov G.S., Berikov V.B.* Stability solving function in problem of the artificial perception and analysis to intermix information. — Novosibirsk: In mathematicians, 2005. — 218 p.
7. *Ruff YU.L., Palyutin E.A.* The Mathematics of logic. — M.: Nauka, 1991. — 336 p.

УДК 37.022:681.3 (075.8)

Методы решения задач на оптимизацию в курсе планиметрии при помощи вспомогательных задач

The methods solutions of the optimization tasks in planimetry course by supporting tasks

Григорьева Т.С., Заикина Т.В.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: bertiskanova_k_t@mail.ru)

Мақалада планиметрия курсындағы оңтайлы есептері және оларды қолданбалы есептер көмегімен шешу әдістемесі қарастырылады. Мұнда оқушылардың интуициясын дамытатын, дәлелді қорытындылауды қажет ететін есептер берілген. Сонымен қатар оқушылардың зерттеу мәдениетін тәрбиелеуге бағытталған мектеп планиметрия курсындағы экстремалды есептердің қойылымы көрсетілген. Мұндай есептердің барлық шешімдері математикалық модельдерді зерттеу және нақты жағдайларда тиімділеу құралдарын қолдануды зерттеу деңгейінде ұсынылады.

In this article there are tasks of optimization in planimetry course that are described by authors. It’s also devoted to methods of making it by supporting tasks. In the article we can find some tasks that can let us develop intuition of pupils, learn them to draw sound conclusions. Moreover, authors tried to pay attention to making extremal tasks in school planimetry course that can make pupils exercise their culture of research. All the solutions of the tasks take part on the level of research of the mathematical model and on the level of research of the real systems by optimization tools.

Как показывают наблюдения, нерешенная сразу задача или проблема, на решение которой было затрачено немало творческих усилий, долго привлекает внимание учащегося. Время от времени он возвращается к ее решению, делает новые попытки на новой математической основе, испытывает новые приемы и методы и, в конце концов, при известной настойчивости, решает ее. Но даже если ученик и не решит задачу, то сами попытки решить ее, вызывающие столь усиленную концентрацию его умственных способностей, принесут несомненную пользу.

Из этих наблюдений нами сделан вывод, что для решения такой задачи необходимо создать такие условия, при которых учащиеся предварительно «вводятся» в решение задачи. Такое «введение» заключается в следующем. Сначала решаются вспомогательные задачи, постепенно вводящие учащихся в круг вопросов, близких к проблемным. При этом вырабатывается определенная методика решения этих задач. Для описания принципиальных процессов организации вспомогательных задач введем основные понятия.