УДК 517.956.3

# О граничной задаче для спектрально-нагруженного параболического оператора II

# On the boundary value problem for the spectrally loaded parabolic operator II

Солдатов А.П.[1], Рамазанов М.И.[2], Шалдыкова Б.А.[3]

*[1]Белгородский государственный университет, Россия;*
*[2]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
*[3]Рудненский индустриальный институт (E-mail: bahyt21@mail.ru)*

Мақалада шексіз облыстардағы спектралды-жүктелген параболалық түрдегі шекті есептердің зерттелуі жалғастырылған, бұл жерде жүктелген қосынды туындының реті теңдеудің дифференциалды бөлігі ретімен дәл келіп, жүк нүктесі кеңістік айнымалысымен ауыспалы жылдамдықпен қозғалуда. Жүк нүктесінің қозғалысы $x = \alpha(t)$ заңы бойынша жүзеге асады, мұнда $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t)\right]^{\omega}$; $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty$.

The object of this research is to continue investigation of the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic equations in unbounded domain, when the order of initial in a loaded term is equal to the order of a differential part of equation and loaded point in space variable moves with variable speed. The loaded point is moving according to law $x = \alpha(t)$, where $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t)\right]^{\omega}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = \infty$.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой были рассмотрены граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности и обобщенные спектральные задачи (1–4), которые были сведены к решению союзных особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода (17) и (21).

Для решения данных особых интегральных уравнений Вольтерра были построены соответствующие характеристические интегральные уравнения (25), (26) [2–6].

4. *Исследование характеристических интегральных уравнений*. Для исследования характеристических уравнений (25) и (26) произведем в них замены переменных:

$$\alpha(t) = \left[(1-2\omega)t_1\right]^{\frac{\omega}{1-2\omega}}, \quad \alpha(\tau) = \left[(1-2\omega)\tau_1\right]^{\frac{\omega}{1-2\omega}}$$

и введем следующие обозначения:

$$\varphi(t_1) = t_1^{\frac{3/2+\omega}{1-2\omega}} \mu\left(\left\{(1-2\omega)t_1\right\}^{\omega/(1-2\omega)}\right), \quad f_2(t_1) = t_1^{\frac{3/2+\omega}{1-2\omega}} f_1\left(\left\{(1-2\omega)t_1\right\}^{\omega/(1-2\omega)}\right),$$

$$\psi(t_1) = t_1^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} \nu\left(\left\{(1-2\omega)t_1\right\}^{\omega/(1-2\omega)}\right), \quad g_2(t_1) = t_1^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} g_1\left(\left\{(2\omega-1)t_1\right\}^{\omega/(1-2\omega)}\right), \tag{35}$$

$$k(t_1-\tau_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t_1-\tau_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\right), \quad 0<\tau_1<t_1<\infty, \tag{36}$$

$$k^*(\tau_1-t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau_1-t_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(\tau_1-t_1)}\right), \quad 0<t_1<\tau_1<\infty. \tag{37}$$

Тогда рассматриваемые уравнения преобразуются в уравнения типа свертки:

$$k_\lambda\varphi \equiv (I-\lambda k)\varphi \equiv \varphi(t_1) - \lambda\int_0^{t_1} k(t_1-\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1 = f_2(t_1), \quad 0<\tau_1<t_1<\infty, \tag{38}$$

$$k_\lambda^*\psi \equiv (I-\lambda k^*)\psi \equiv \psi(t_1) - \bar{\lambda}\int_{t_1}^{\infty} k(\tau_1-t_1)\psi(\tau_1)d\tau_1 = g_2(t_1), \quad 0<t_1<\tau_1<\infty. \tag{39}$$

Эти уравнения были исследованы ранее. Используя полученные ранее результаты, запишем решения союзных характеристических интегральных уравнений (38) и (39) в следующем виде:

$$\varphi_{\lambda}(t_1)=\lambda\int\limits_0^{t_1} r_{\lambda+}(t_1-\tau_1)f_2(\tau_1)d\tau_1+f_2(t_1),\;\; t_1\in R_+, \tag{40}$$

$$\psi_{\lambda}(t_1)=\overline{\lambda}\int\limits_{t_1}^{\infty} r_{\lambda-}(t_1-\tau_1)g_2(\tau_1)d\tau_1+g_2(t_1)+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k exp(-iz_k t_1),\;\; t_1\in R_+, \tag{41}$$

где $r_{\lambda-}(\theta)$ и $r_{\lambda+}(\theta)$ есть сужения на отрицательную и положительную полуоси оригинала Фурье $R_{\lambda}^{-}(\theta),\ R_{\lambda}^{+}(\theta)$, определяемые по формулам

$$r_{\lambda-}(\theta)=2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)+2\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right),\;\; \mathrm{Re}\{iz_k\}<0,\;\; |\lambda|>1,\;\; \theta\in R_-, \tag{42}$$

$$r_{\lambda-}(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\lambda^m\exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right),\;\; |\lambda|\le 1,\ \theta\in R_-,$$

$$r_{\lambda+}(\theta)=2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta)+2\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right),\;\; \mathrm{Re}\{-iz_k\}>0,\;\; |\lambda|>1,\;\; \theta\in R_+, \tag{43}$$

$$r_{\lambda+}(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\lambda^m\exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right),\;\; |\lambda|\le 1,\ \theta\in R_+,$$

где числа $z_k$, $N_1$, $N_2$ определяются по формулам

$$z_k=s_k+i\sigma_k=2(\arg\lambda+2k\pi)\ln|\lambda|-i\left[\ln^2|\lambda|-(\arg\lambda+2k\pi)^2\right], k\in Z, \tag{44}$$

$$-N_1\le k\le N_2,\;\; N_1=\left[\frac{\ln|\lambda|+\arg\lambda}{2\pi}\right],\;\; N_2=\left[\frac{\ln|\lambda|-\arg\lambda}{2\pi}\right]. \tag{45}$$

Теперь в (25) и (26) произведем обратные замены переменных:

$$t_1=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{-1},\;\; \tau_1=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(\tau)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{-1},$$

$$\varphi(t_1)=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}\mu(t),\;\; f_2(t_1)=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}f_1(t),$$

$$\psi(t_1)=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{\frac{3/2-\omega}{1-2\omega}}v(t),\;\; g_2(t_1)=\left\{(1-2\omega)\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right\}^{\frac{3/2-\omega}{1-2\omega}}g_1(t).$$

Тогда согласно (25) и (26) решения сопряженных характеристических интегральных уравнений (3) и (4) будут определены равенствами

$$v(t)=\overline{\lambda}\int\limits_t^{\infty}\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left[(\alpha(\tau))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\tau))^2}r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}g_1(\tau)d\tau+g_1(t)+$$

$$+(1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right),\;\; t\in R_+, \tag{46}$$

$$\mu(t)=\lambda\int\limits_0^{t}\left[\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left[(\alpha(\tau))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\tau))^2}r_+\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(t)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\left[\alpha(\tau)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}f_1(\tau)d\tau+f_1(t),\;\; t\in R_+. \tag{47}$$

Данные решения удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_{\lambda}(t)\in L_1(R_+),\;\; \psi_{\lambda}(t)\in L_{\infty}(R_+). \tag{48}$$

5. *О разрешимости интегральных уравнений (1) и (2) методом регуляризации.* Покажем, что исходные интегральные уравнения можно регуляризовать решениями характеристических уравнений (25), (26).

Введем следующее обозначение:

$$\tilde{K}(\tau,t)=K_2(\tau,t)-K(\tau,t). \tag{49}$$

Учитывая уравнение (4), запишем интегральное уравнение (2) в виде

$$K_\lambda^*\nu\equiv\nu(t)-\bar{\lambda}\int_t^\infty K(\tau,t)\nu(\tau)d\tau=\bar{\lambda}\int_t^\infty\tilde{K}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau+g_1(t),\ \ t\in R_+. \tag{50}$$

Будем решать последнее уравнение как характеристическое, считать правую часть последнего уравнения временно известной. Тогда решение уравнения (50) запишем, согласно формуле (46), в виде

$$\nu(t)=g_1(t)+\bar{\lambda}\int_t^\infty\tilde{K}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau+\bar{\lambda}\int_t^\infty\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left[(\alpha(\tau))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\tau))^2}r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}\cdot$$

$$\left[g_1(\tau)d\tau+\bar{\lambda}\int_\tau^\infty\tilde{K}(\tau,\eta)\nu(\eta)d\eta\right]d\tau+(1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right).$$

Приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\hat{K}_\lambda^*\nu\equiv\left(I-\bar{\lambda}\hat{K}^*\right)\nu\equiv\nu(t)-\bar{\lambda}\int_t^\infty\hat{K}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau=$$

$$=\hat{g}_1(t)+(1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right),\ \ t\in R_+, \tag{51}$$

где

$$\hat{K}(\tau,t)=\tilde{K}(\tau,t)+\bar{\lambda}\int_t^\tau\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\eta)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left[(\alpha(\eta))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\eta))^2}r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left([\alpha(\eta)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}\cdot\tilde{K}(\tau,\eta)d\eta=\tilde{K}(\tau,t)+\bar{\lambda}\tilde{\tilde{K}}(\tau,t), \tag{52}$$

$$\hat{g}_1(t)=g_1(t)+\bar{\lambda}\int_t^\infty\left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\frac{\left[(\alpha(\tau))^{1/\omega}\right]'}{(\alpha(\tau))^2}r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left([\alpha(\tau)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}-[\alpha(t)]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}g_1(\tau)d\tau. \tag{53}$$

Покажем, что интегральное уравнение (51) разрешимо методом последовательных приближений, т.е. является регулярным. Для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$\left|\hat{K}(t,\tau)\right|\le C(\omega)\frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{-1-\omega-\varepsilon}\sqrt{\tau-t}},\ \ 0<\varepsilon<\frac{1-2\omega}{2},\ \ 0<t<\tau<\infty. \tag{54}$$

Вначале преобразуем интегральное уравнение (20) на конечном интервале. Для этого в данном уравнении произведем замены переменных

$$t=t_1^{-1},\ \ \tau=\tau_1^{-1},\ \ \alpha(t)=\frac{1}{\alpha(t_1)},\ \ \alpha(\tau)=\frac{1}{\alpha(\tau_1)},$$

получим

$$\nu(t_1)-\bar{\lambda}\int_0^{t_1}K'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1=\bar{\lambda}\int_0^{t_1}\tilde{K}'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1+g_1(t_1), \tag{55}$$

где

$$\tilde{K}'(t_1,\tau_1)=K_2'(t_1,\tau_1)-K'(t_1,\tau_1) \tag{56}$$

и ядра $K_2'(t_1,\tau_1)$, $K'(t_1,\tau_1)$ определяются из равенства (32). Тогда равенства (51)–(53) примут вид

$$\hat{K}_\lambda^{*\prime}\nu\equiv\left(I-\bar{\lambda}\hat{K}^{*\prime}\right)\nu\equiv\nu(t_1)-\bar{\lambda}\int_0^{t_1}\hat{K}'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1=$$

$$= \hat{g}_1(t_1) + (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}} \left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \cdot \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right), \tag{57}$$

где

$$\hat{K}'(t_1,\tau_1) = \tilde{K}(t_1,\tau_1) + \bar{\lambda}\int_{\tau_1}^{t_1}\left[\frac{\alpha(\eta)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\left[\left(\alpha(\eta)\right)^{1/\omega}\right]'}{\left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{2-2\omega}{\omega}}} r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(t_1\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)\right\}\tilde{K}'(\eta,\tau_1)d\eta = \tilde{K}'(t_1,\tau_1) + \bar{\lambda}\tilde{\tilde{K}}'(t_1,\tau_1), \tag{58}$$

$$\hat{g}_1(t_1) = g_1(t_1) + \bar{\lambda}\int_0^{t_1}\left[\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t_1)}\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\left[\left(\alpha(\tau_1)\right)^{1/\omega}\right]'}{\left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{2-2\omega}{\omega}}} r_-\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - \left[\alpha(\tau_1)\right]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}\right)\right\} g_1(\tau_1)d\tau_1. \tag{59}$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (57) действительно является регулярным, т.е. разрешимо методом последовательных приближений. Вначале преобразуем оценку для резольвенты:

$$\left| r_{\lambda-}\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(\eta)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(t_1)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}\right| \le$$

$$\le M_1 \frac{(1-2\omega)^{1/2}\left(\alpha(t_1)\alpha(\eta)\right)^{\frac{1-2\omega}{2\omega}}}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\delta_0}{1-2\omega}\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}\right) +$$

$$+ M_2 \frac{(1-2\omega)^{3/2}\left(\alpha(t_1)\alpha(\eta)\right)^{\frac{3(1-2\omega)}{2\omega}}}{\left(\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)^{3/2}} \exp\left(-\delta_0(1-2\omega)\frac{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}\left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}{\left[\alpha(t_1)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(\eta)\right]^{\frac{1-2\omega}{\omega}}}\right).$$

Далее, при условии, что $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha_0(t))\right]^{\omega}$ и $\left|\alpha_0(t_1) + t_1\alpha_0'(t_1)\right| < 1,$ будем иметь:

$$\left| r_{\lambda-}\left\{\frac{1}{1-2\omega}\left(\left[\alpha(\eta)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}} - \left[\alpha(t_1)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right\}\right| \le$$

$$\le \tilde{M}_1 \frac{\sqrt{t_1}\eta^{-\omega+1/2}}{\sqrt{t_1-\eta}} \exp\left(-C_1(\omega)\frac{t_1-\eta}{t_1\eta^{1-2\omega}}\right) + \tilde{M}_2 \frac{t_1^{3/2}\eta^{\frac{3}{2}(1-2\omega)}}{(t_1-\eta)^{3/2}} \exp\left(-C_2(\omega)\frac{t_1\eta^{1-2\omega}}{t_1-\eta}\right). \tag{60}$$

Здесь $C_j(\omega),\ \tilde{M}_j(\omega),\ j=1,2-$ постоянные, зависящие только от $\omega$.

Справедлива следующая лемма:

*Лемма 3.* Если $0 < \varepsilon < \dfrac{1-2\omega}{2},\ \ 0 < \tau_1 < t_1 < \infty,$ то имеет место оценка

$$\left|\hat{K}'(t_1,\tau_1)\right| \le C\frac{t^{1/2+\varepsilon}}{\tau^{\omega+1/2+\varepsilon}\sqrt{t_1-\tau_1}}. \tag{61}$$

Доказательство леммы 1 будет следовать из оценок для резольвенты (60), оценки (33) и [1].

Итак, в силу оценки (61) уравнение (57), а вместе с ним и уравнение (51) имеют только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (50) и (51) следует, что однородное уравнение

$$\mathrm{K}_{2\lambda}^* v \equiv \left(I - \lambda\mathrm{K}_2^*\right)v \equiv v(t) - \lambda\int_0^t K_2(\tau,t)v(\tau)d\tau = 0,\ t\in R_+ \tag{62}$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\hat{\mathrm{K}}_{\lambda}^{*}v \equiv v(t) - \lambda\int_{t}^{\infty}\hat{K}(\tau,t)v(\tau)d\tau = (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k exp\left(iz_k\frac{\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}}{1-2\omega}\right),\ t\in R_+. \quad (63)$$

Рассмотрим вместо (63) семейство интегральных уравнений:

$$\hat{\mathrm{K}}_{\lambda}^{*}v \equiv v(t) - \lambda\int_{t}^{\infty}\hat{K}(t,\tau)v(\tau)d\tau = (1-2\omega)^{\frac{\omega-3/2}{1-2\omega}}\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega}\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right), \quad (64)$$

$$k=-N_1,...,0,...,N_2,\ t\in R_+.$$

В силу того, что каждое из уравнений (64) имеет единственное нетривиальное решение $v_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,...,0,...,N_2$ (соответствующее правой части уравнения (64) $\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega}\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)$), то для каждого значения параметра $\lambda\in C\setminus D_0$ эти функции $v_{\lambda k}(t),\ k=-N_1,...,0,...,N_2,$ будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (62) (а значит, и однородного для (21) уравнения).

Справедливы следующие леммы:

*Лемма 4.* Значения $\lambda\in D_0$ являются регулярными числами оператора $\mathrm{K}_{2\lambda}^{*}$ (21).

*Лемма 5.* Множество $C\backslash D_0$ составляет характеристические числа оператора $\mathrm{K}_{2\lambda}^{*}$ (21). Причем, если $\lambda\in D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m = 1,2,...,$ то $dim\ Ker\left(\mathrm{K}_{2\lambda}^{*}\right) = \chi(\lambda)=m;$ и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (64):

$$v_{\lambda k}(t) = \left[\hat{\mathrm{K}}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\left[\left[\alpha(t)\right]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}\left[\alpha(t)\right]^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right],\ k = 1,...,\ m= N_1 +N_2 +1.$$

*Замечание 5.* Общим решением неоднородного интегрального уравнения (21) будет функция

$$v_{\lambda}(t) = \left[\hat{\mathrm{K}}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\hat{g}(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1}c_k v_{\lambda k},\ t\in R_+, \quad (65)$$

где $c_k,\ k=1,...,m,$ — произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (1), являющегося союзным для уравнения (2). Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1), для любого $\lambda\in C$ имеет только тривиальное решение. Таким образом, справедлива

*Лемма 6.1.* Каждое значение $\lambda\in C$ является регулярным числом оператора $\mathrm{K}_{2\lambda}$ (17).

2. Неоднородное интегральное уравнение (17) однозначно разрешимо при любой правой части $f_1(t)$, если $\overline{\lambda}\in D_0$.

3. Если $\lambda\in D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m = 1,2,...,$ то для однозначной разрешимости неоднородного интегрального уравнения (17) необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(t)$ удовлетворяли следующим условиям ортогональности:

$$\int_0^{\infty}v_{\lambda k}(t)f_1(t)dt = 0,\ k = 1,...,\ m=\chi(\lambda)= N_1 +N_2 +1. \quad (66)$$

*Замечание 6.* Согласно утверждениям леммы 6 решением неоднородного интегрального уравнения (17) будет функция

$$\mu_{\lambda}(t) = \left[\mathrm{K}_{2\lambda}\right]^{-1}f_1(t),\ t\in R_+. \quad (67)$$

*Замечание 7.* Из изложенных выше результатов непосредственно следует, что

$$\mu_{\lambda}(t)\in L_1(R_+),\ \nu_{\lambda}(t)\in L_{\infty}(R_+). \quad (68)$$

6. *Исследование граничных задач (1) и (2).* Решение задачи (1) запишем в виде

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}K_0(x,t-\tau)\mu_{\lambda}(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (69)$$

где функции $\mu_\lambda(t)$ определяются из (67) и $\alpha\left((t)\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f(x,t)\in L_1(Q)$. Учитывая неотрицательность функций $K_0(x,t-\tau)$ (13) и $G(x,\xi,t-\tau)$(6), заключаем, что функция (69) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (7).

Далее, запишем решение задачи (2) в виде

$$\nu(x,t)=-\lambda\int_t^{\infty}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)_{|\xi=\alpha(\tau)}\nu_\lambda(\tau)d\tau+\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{70}$$

где функция $\nu_\lambda(t)\in L_\infty(R_+)$ из (65).

Сформулируем полученные результаты по разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

*Теорема 3.* Если $\lambda\in D_0$, то для $\forall f$ граничная задача (1) имеет единственное решение $u\in U$. Если $\lambda\in\left\{C\setminus D_0\right\}\bigcap\left\{D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}\right\}$, то для однозначной разрешимости граничной задачи (1) в классе U необходимо и достаточно, чтобы функция $f$ удовлетворяла условиям ортогональности:

$$\int_0^{\infty}v_{\lambda k}(x,t)f(x,t)dxdt=0,\ k=1,...,\ m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1. \tag{71}$$

*Теорема 4.* Если $\lambda\in D_0$, то для $\forall g$ граничная задача (2) имеет единственное решение $\nu\in V$. Если $\lambda\in\left\{C\setminus D_0\right\}\bigcap\left\{D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}\right\}$, то для $\forall g$ граничная задача (2) имеет общее решение $\nu\in V$, состоящее из решений $v_{одн.}(x,t)$ однородного уравнения:

$$v_{одн}(x,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k v_{\lambda k}(x,t), \tag{72}$$

$$v_{\lambda k}(x,t)=-\bar{\lambda}\int_t^{\infty}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}K_0(x,t-\tau)v_{\lambda k}(\tau)d\tau, \tag{73}$$

где $v_{\lambda k}(t)=\left[\hat{K}_\lambda^*\right]^{-1}\left[\exp\left(-\frac{iz_k}{1-2\omega}\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right],\ k=1,...,m,\ c_k,$ — произвольные постоянные, и частного решения $v_{част.}(x,t)$:

$$v_{част}(x,t)=-\bar{\lambda}\int_t^{\infty}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}K_0(x,t-\tau)\left[\hat{K}_\lambda^*\right]^{-1}\hat{g}(\tau)d\tau+$$
$$+\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}G(x,\xi,t-\tau)\tau^{3/2-\omega}g(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{74}$$

7. *Обобщенная спектральная задача*. Непосредственно из утверждений лемм 3–6 получаем:

*Теорема 3.* Множество значений $\lambda\in C$ есть резольвентное множество оператора $L_1$ (3).

*Теорема 4.* Открытое множество $D_0$ является резольвентой для оператора $L_1^*$ (4), а его дополнение $C\backslash D_0$ составляет спектр оператора $L_1^*$ (4). Причем, если $\lambda\in D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{(-1)^m e^{m\pi}\right\}$, $m = 1,2,...,$ то $dim\ Ker(L_1)=\chi(\lambda)=m$; и соответствующие собственные функции оператора $L_1^*$ (4) определяются согласно формулам

$$v_{\lambda k}(x,t)=-\bar{\lambda}\int_t^{\infty}\left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}K_0(x,t-\tau)v_{\lambda k}(\tau)d\tau,\ k=1,...,\ m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1, \tag{75}$$

где

$$v_{\lambda k}(t)=\left[\hat{K}_\lambda^*\right]^{-1}\left[\exp\left(\frac{iz_k}{1-2\omega}\left(\alpha(t)\right)^{-\frac{1-2\omega}{\omega}}\right)\right],\ k=1,...,\ m=\chi(\lambda)=N_1+N_2+1.$$

## References


1. *Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A.* About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 2 (61). — P. 10–18.
2. *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On the boundary value problem for the spectrally-loaded heat conduction operator // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — № 3. — P. 527–547.
3. *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a boundary value problem for a spectrally-loaded heat operator. I // Siberian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 43. — № 4. — P. 498–508.
4. *Amangalieva M.M., Ahmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* The boundary value problems for the spectrally-loaded heat conduction operator with approaching loaded line in zero or infinity // Different. equations. — 2011. — Vol. 47. — № 2. — P. 231–243.
5. *Dzhenaliev M.T., Shaldykova B.A., Kusainova B.S.* Sliding boundary proble for spectrally-loaded heat conduction operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2010. — № 1 (57). — P. 12–19.
6. *Shaldykova B.A.* Sliding boundary problem for spectrally-loaded heat conduction operator. II // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2010. — № 2 (58). — P. 75–82.


УДК 517.62

# Approximated solution of differential equations with vertical asymptotes

# Тік асимптотасы бар дифференциалдық теңдеулердің жуықталған шешімі


Uxikbayev K.B.

*Suleyman Demirel University, Almaty (E-mail: kanamath@gmail.com)*



Мақалада тік асимптотасы болатын дифференциалды теңдеулердің жуықталған шешімін табу әдісі қаралады. Бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімінің максималды болу интервалын бағалау және ескеру үшін бір қадамдық сандық әдістердің өзгертілген түрі ұсынылған. Сонымен қатар ол әдістің жинақтылығы және ауытқу шамасы қарастырылған.

В статье рассматривается метод нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений, имеющих вертикальные асимптоты. Предлагается модификация одношаговых численных методов, позволяющая оценивать и учитывать максимальный интервал существования решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с тем, чтобы не строить лишенные смысла «приближенные решения» за границами этого промежутка, если он кончен. Рассмотрены сходимость предлагаемого метода и погрешность.


Application of step-by-step methods of the solution of a problem of Couchy for the ordinary differential equation

$$y' = f(x, y), x \geq 0; \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha \tag{2}$$

meets serious difficulties if the solution at $y(x)$ is not continuous on all numerical axis.

Really, customary definition of the solution as *x*, value forces to choose argument functions as a step. Calculations with such step do not allow to "notice", for example, a vertical asymptote of the solution.

In this study I offer modified version of the single-step methods which allows to estimate and consider the maximum interval of existence of the solution of a problem of Couchy for the ordinary differential equations [1–6].

This modification is based on geometrical idea of consideration of the solution as a curve on a plane Oxy. At such point of view as a step it is obvious to choose the distance between points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$, which approximates the solution.

Let's apply this idea to Euler's method described by formulas $x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$. As here the integrated curve is replaced with a straight line as constant step H we will choose distance between points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.