

О соотношении волновых функций де Бройля и Шредингера

About the correlations between wave functions of de Broglie and Schrödinger

Архипов В.В., Кудусов А.С., Камрикова А.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (e-mail: midav_73@mail.ru)

Мақалада Шредингер теориясы мен де Бройльдің релятивистік теориясының қатынасы туралы сұрақтар қарастырылған. Нақты мысал ретінде екі теорияның еркін бөлшектерінің толқындық функциясы зерттелген. де Бройльдің релятивистік теориясы үздіксіз түрде классикалық деңгейге редуцирленбейтіндігі, сонымен қатар бақылаушының Шредингер толқынның фазалық жылдамдығы және еркін бөлшектің жылдамдығымен қозғалысының ерекше жағдайындағы тұрақты фаза беттерінің сипаты зерттеліп, осы екі жағдай дуальды болатындығы көрсетілген.

There is considered the question about correlations between the Schrödinger's theory and the relativistic theory of de Broglie in the present work. As the concrete example the wave functions of a free particle are researched for both theories. It is shown that the relativistic de Broglie's theory cannot be reduced to classical level in continual way. In the article, the behavior of the constant phase surfaces is researched for special cases of the observer movements with phase velocity of Schrödinger's wave and the free particle velocity. It is shown that both cases are dual to each other.

Введение

В работе исследована область согласования релятивистского и классического подходов к квантованию физических систем. Согласно де Бройлю каждой частице сопоставляется некоторая монохроматическая волна

$$\psi(r, t) = C \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad (1)$$

где частота ω и волновой вектор \vec{k} связаны с энергией и импульсом частицы теми же соотношениями, которые были изначально предложены для квантов света:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (2)$$

Причем энергия и импульс являются релятивистскими (m — масса покоя):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3)$$

Как положительные аспекты этой теории можно отметить возможность вычисления расположения максимумов и минимумов дифракционных картин микрочастиц и объяснение устойчивости электронов на стационарных орбитах в атоме [1, 2].

Теория де Бройля получила экспериментальное подкрепление три года спустя в опытах Дэвисона и Джермера. Затем последовал ряд успешных экспериментов других исследователей.

Обобщение изначальной теории де Бройля до теории волнового пакета позволило обойти такие ее недостатки, как конфликт между бесконечностью монохроматических волн и локальностью частиц, а также сверхсветовое значение фазовой скорости. Однако трудности, связанные с расплыванием волнового пакета вследствие дисперсии его составляющих для частиц с ненулевой массой, новая — вероятностная трактовка волновых функций, предложенная М.Борном, и успехи квантовой теории Шредингера-Гейзенберга перевели теорию де Бройля в разряд «отживших».

Тем не менее проблемы, связанные с геометрической основой процедуры квантования, и неразрешённые до сих пор вопросы философского характера о сущности вещества не позволяют волновой теории материи безвозвратно уйти в прошлое. Об этом свидетельствует масса работ, посвященных альтернативным подходам к физической картине мира, например [3–5], поток которых никогда не иссякал.

Актуальность представленной работы обусловлена тем, что во всех известных нам учебниках по квантовой теории (см., напр., [1, 2, 6, 7]) математический вид волны де Бройля и ее согласие с

экспериментом делегируются теории Шредингера без всяких объяснений. Однако нетрудно заметить, что соответствующие этим волнам частоты должны сильно отличаться ввиду учета в релятивистском случае энергии покоя частиц. Вследствие этого возникают вопросы о том, что происходит с геометрией волн при редукции теории де Бройля на классический уровень, почему сохраняются следствия, вытекающие из обеих теорий и можно ли найти гладкий путь деформации между этими теориями, который бы обеспечил выполнение принципа соответствия Бора?

1. Соотношение волновых функций де Бройля и Шредингера

Волновая функция свободной частицы, распространяющаяся вдоль оси x , имеет вид:

$$\psi(x, t) = A \exp \frac{i}{\hbar} \{ p_x x - Et \}, \quad (4)$$

где под p_x и E в теории де Бройля понимаются релятивистские импульс и энергия (3), или классические выражения для импульса (mv) и кинетической энергии ($mv^2/2$) в теории Шредингера. При малых скоростях выражения (3) могут быть заменены следующим приближением:

$$p_x = mv_x, \quad E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, для нерелятивистских скоростей соотношение между волновыми функциями де Бройля и Шредингера для свободной частицы имеет вид

$$\psi_B = \psi_S \exp \frac{i}{\hbar} \{ mc^2 t \}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что разница в частотах волн де Бройля и Шредингера (ω_B и ω_S , соответственно) для электрона отличается на величину

$$\omega_B - \omega_S = \frac{mc^2}{\hbar} \approx 10^{21} (c^{-1}). \quad (7)$$

2. Графическое изображение волн

Для начала рассмотрим обычную классическую плоскую волну вида

$$y = A \cos(kx - \omega t), \quad (8)$$

где y — отклонение некоторой величины от положения равновесия, A — амплитуда. Для простоты мы положили начальную фазу волны равной нулю. Уравнение плоской волны связывает между собой три меняющиеся величины: время, координату и колеблющуюся величину. Соответственно, волновой процесс может быть изображен с помощью трех двумерных графиков, попарно действующих эти параметры, как это изображено на рисунке 1.

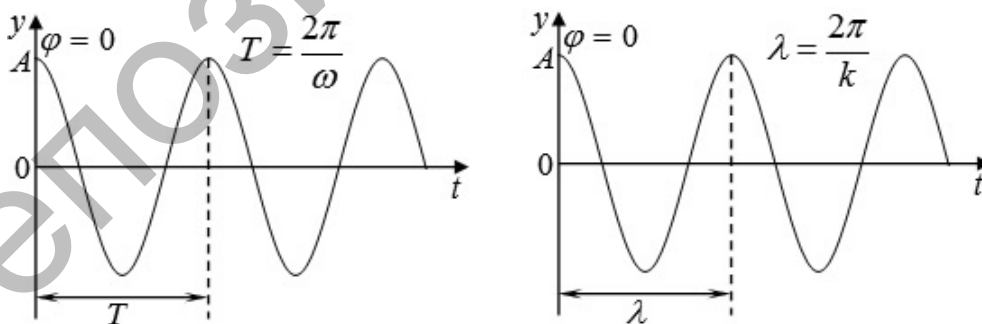


Рис. 1. Развёртка волны во времени и в пространстве

Расстояние между точками одной фазы задается в первом случае периодом T и во втором — длиной волны λ . Наиболее интересным с точки зрения геометрии будет изображение волновых поверхностей в пространстве–времени (рис. 2). Тангенс угла наклона линий постоянной фазы дает фазовую скорость волны.

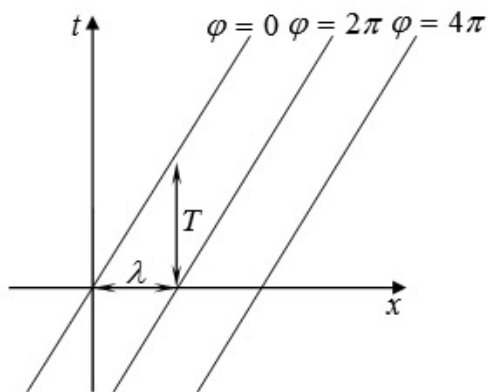


Рис. 2. Изображение волновых поверхностей плоской волны в пространстве–времени. Вертикальная линия изображает мировую линию наблюдателя, покоящегося относительно системы координат

3. Преобразования Галилея для волнового процесса

Рассмотрим преобразования волновых поверхностей при переходе между инерциальными системами отсчета в соответствии с классическими преобразованиями Галилея:

$$x = x' + Vt'; \quad t = t', \quad (9)$$

где V — скорость подвижной системы отсчета или движущегося наблюдателя. Применяя (9) к уравнению (1), получим:

$$y = A \cos(kx' - (\omega - kV) \cdot t'). \quad (10)$$

Таким образом, частота и период для наблюдателя, движущегося вдоль волны:

$$\omega' = \omega - kV, \quad T' = \frac{2\pi}{\omega - kV} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{\lambda}V} = \frac{\lambda T}{\lambda - TV}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что период колебаний в системе отсчета, двигающейся в том же направлении, что и волна, становится больше ($T' > T$), а длина λ оказывается инвариантом, как это проиллюстрировано на рисунке 3.

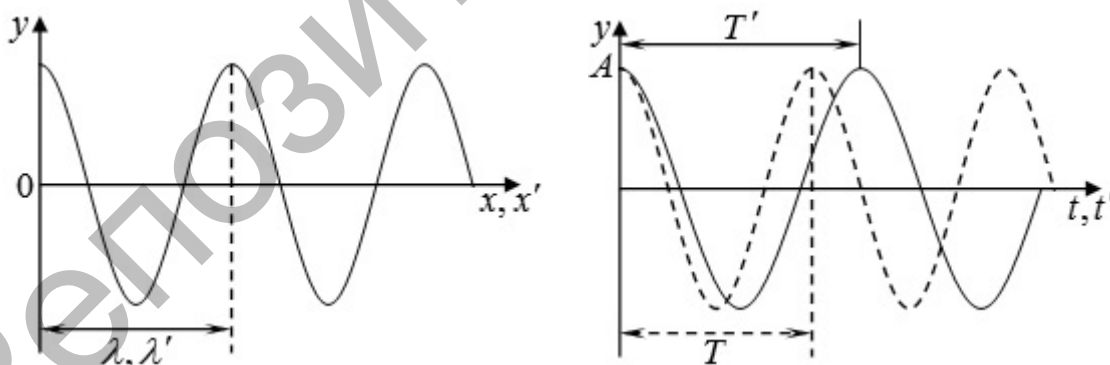


Рис. 3. Соотношение между периодами и длинами волн в двух инерциальных системах отсчета

Волновые поверхности также изменяются, а именно: нетрудно видеть, что переход в сопутствующую волне систему координат приводит к уменьшению их наклона. Действительно, чем ближе скорость наблюдателя к фазовой скорости волны, тем меньше будет относительная фазовая скорость (рис. 4). При достижении наблюдателем фазовой скорости волны вид поверхностей постоянной фазы превращается в вертикальный «частокол».

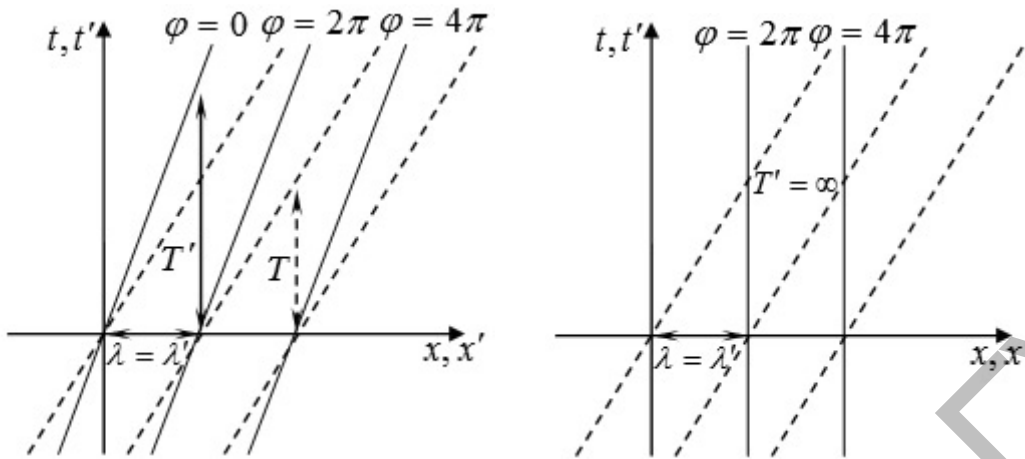


Рис. 4. Изменение вида волновых поверхностей постоянной фазы в зависимости от выбора системы отсчета. Пунктиром указаны поверхности для лабораторной системы отсчета. Справа — предельный случай сопровождения волны наблюдателем

То есть наблюдатель сопровождает гребни волн и колебательный процесс относительно него является застывшим во времени. Волновое уравнение (8) вырождается при этом в уравнение гармонической пространственной гребенки (рис. 5).

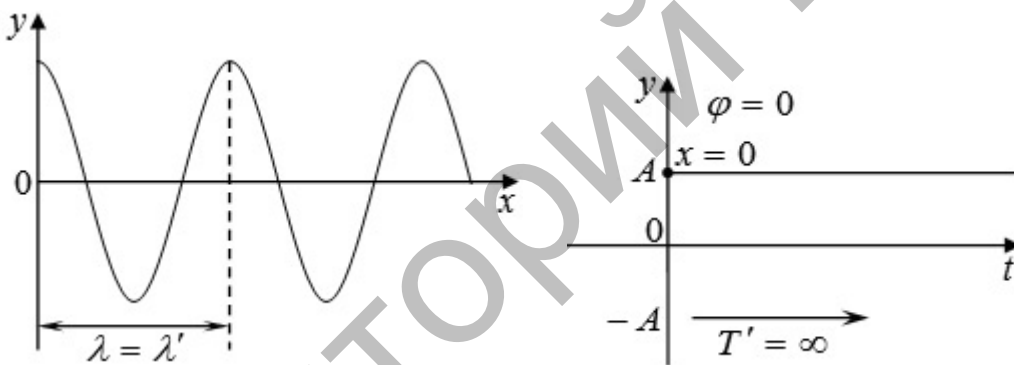


Рис. 5. Профиль «гармонической гребёнки». Справа — вырождение колебаний во времени при движении наблюдателя с фазовой скоростью волны

4. Описание волновых процессов в релятивистском случае

Уравнение плоской монохроматической волны вида (8) имеет очень симметричный характер в духе специальной теории относительности. Пространственная координата и время входят в уравнение ковариантным образом. Коэффициенты — волновое число и циклическая частота — задаются формулами одного вида:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (12)$$

Можно ожидать, что фаза такой волны будет инвариантна относительно преобразований Лоренца. Учитывая, что в формализме специальной теории относительности k, ω образуют 4-ковектор $(\omega/c, \vec{k})$, можно применить преобразования Лоренца вида

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad \omega = \frac{\omega + Vk'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad k = \frac{k' + \frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (13)$$

Применяя формулы (13) к фазе волнового уравнения (1), нетрудно убедиться, что фаза плоской монохроматической волны ковариантна, т.е. сохраняет свой вид во всех инерциальных системах отсчета.

Если фазовая скорость волны меньше скорости света, то может быть рассмотрен случай, когда наблюдатель движется совместно с волной. Такая ситуация была рассмотрена выше в классическом формализме, и там не возникало каких-либо проблем ввиду отсутствия запретов на скорости переноса энергии и информации. В релятивистском же случае такой запрет существует и должен быть принят во внимание.

Пусть скорость движущейся системы отсчета совпадает с фазовой скоростью волны, т.е.

$$V = v_{\text{фаз.}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что (эти «особые» параметры пометим нулем):

$$\omega_0 = 0, \quad k_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{kc}\right)^2} \quad \text{или} \quad T_0 = \infty, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{cT}\right)^2}}. \quad (15)$$

Таким образом, при совпадении скорости наблюдателя с фазовой скоростью волны период волны обращается в бесконечность, так же как это имеет место в классическом случае, а длина волны принимает свое максимальное значение (рис. 6). Нетрудно показать, что «собственные» волновое число k_0 и длина волны λ_0 являются инвариантами относительно преобразований (13). Действительно, из (15) следует, что

$$(\omega/c)^2 - k^2 = -k_0^2, \quad (16)$$

что автоматически подразумевает инвариантность k_0 . Картина поверхностей постоянной фазы схожа с картиной для классического случая. Однако из-за неабсолютности длины волны «частокол» поверхностей становится более разреженным, как это показано на рисунке 6.

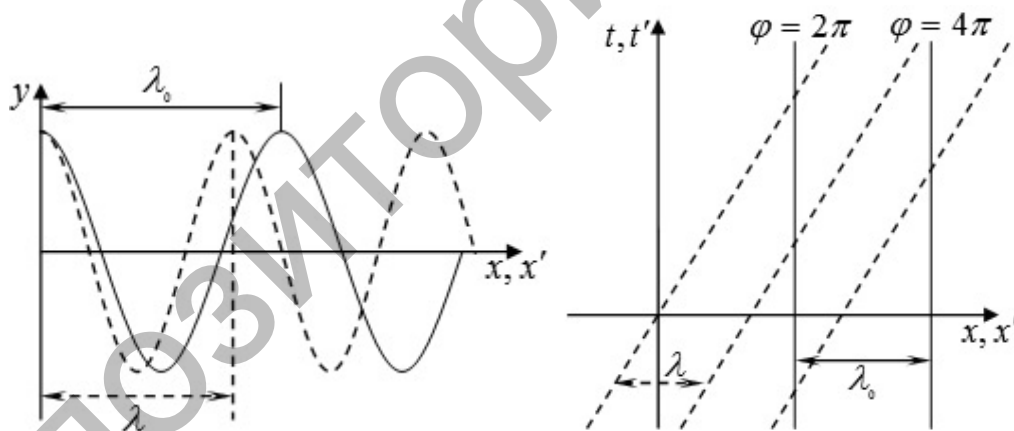


Рис. 6. Волна, покоящаяся относительно наблюдателя, имеет максимальную длину. Пунктиром показаны профиль волны и поверхности постоянной фазы в лабораторной системе отсчета или в классической теории

5. Волны де Бройля

Перед рассмотрением геометрических аспектов волн де Бройля отметим ряд соотношений, которые лежат в основе его релятивистской квантовой теории, для начала — основное уравнение релятивистской динамики:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Введем частоту ω_0 , соответствующую энергии покоя mc^2 , тогда уравнение с учетом (2) примет вид:

$$\omega^2 - k^2 c^2 = \omega_0^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{T^2} - \frac{c^2}{\lambda^2} = \frac{1}{T_0^2}. \quad (17)$$

Будем называть ω_0 собственной частотой, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — собственным периодом. Так как фазовая

скорость волн де Бройля больше скорости света, не может рассматриваться вопрос о виде этой волны в системе отсчета, имеющей скорость, равную фазовой. Однако в этом случае можно рассмотреть вопрос о системе отсчета, в которой покоится частица, соответствующая волне де Бройля. Положим импульс частицы равным нулю. Тогда ее длина, длина волны, согласно соотношениям Эйнштейна, обращается в бесконечность, а период становится равным собственному периоду (рис. 7).

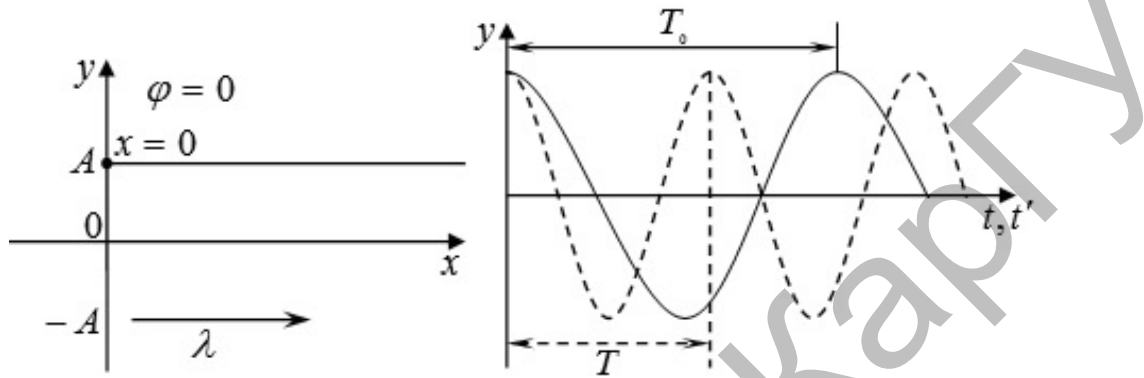


Рис. 7. Длина волны де Бройля покоящейся частицы обращается в бесконечность. Значение колеблющегося параметра в волне де Бройля колеблется с собственным периодом — максимальным из возможных для данной частицы

Отметим, что собственный период является максимальным из возможных для данной частицы, что следует из (17). Картина распределения поверхностей постоянной фазы принимает вид как на рисунке 8.

Сравнивая этот вид со случаем, изображенным на рисунке 6, нетрудно заметить существование симметрии между системами отсчета,двигающимися с фазовой скоростью волны для времени-подобных фазовых поверхностей, и системами отсчета,двигающимися со скоростью частицы для пространственно-подобных фазовых поверхностей волн де Бройля.

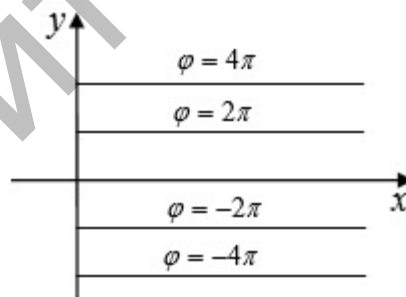


Рис. 8. Картина распределения поверхностей постоянной фазы для волн с фазовой скоростью больше скорости света

То есть можно говорить о существовании взаимосвязи и симметрии между фазовой скоростью волны и скоростью соответствующей ей частицы. Отметим, что обе эти характерные скорости вычисляются схожим, но взаимнообратным образом:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\text{част}} = \frac{kc^2}{\omega}.$$

Таким образом,

$$v_{\text{фаз}} v_{\text{част}} = \frac{\omega}{k} \frac{kc^2}{\omega} = c^2.$$

Учитывая, что v/c трактуется в специальной теории относительности как тангенс угла наклона мировой линии [8], мы получаем, что

$$\frac{v_{\text{фаз}}}{c} \cdot \frac{v_{\text{част}}}{c} = 1,$$

и, следовательно, угол между мировой линией частицы и поверхностью постоянной фазы или волны де Бройля должен пониматься как прямой угол.

Заключение

Наблюдаемые экспериментально следствия квантованности микромира связаны со значением соответствующей частице длины волны. Последняя же имеет одинаковое значение для обеих сравниваемых теорий, что объясняет одинаковость их предсказаний.

В то же время фазовая скорость волны Шредингера меньше скорости света, а волны де Бройля — больше. Сравнение этих двух случаев было подробно разобрано в настоящей работе.

При исследовании поведения уравнения одномерной монохроматической волны относительно преобразований Лоренца было показано, что фаза такой волны является ковариантным объектом, не изменяющим своего вида в различных инерциальных системах отсчета. Переход между инерциальными системами отсчета приводит к вращению картины поверхностей постоянной фазы в полном соответствии с геометрической интерпретацией эффектов специальной теории относительности. В случае предельного перехода к системе отсчета, двигающейся с фазовой скоростью волны, для случая, если эта скорость не превышает скорости света, наблюдаемая картина в общих чертах совпадает с предсказаниями классической теории, за исключением увеличения длины волны, не являющегося значительным в классическом пределе.

В результате исследования геометрии волн де Бройля в зависимости от скорости наблюдателя по отношению к скорости соответствующей элементарной частицы выяснено, что скорость частицы имеет аналогичный смысл предельной скорости, как для волн с времениподобными поверхностями постоянной фазы. Принципиальным отличием является то, что при этой скорости вырождению подвержен не период, как это имеет место при движении совместно с волной, а длина волны. То есть длина волны обращается в бесконечность.

Интересным фактом является взаимная перпендикулярность фазовой скорости волны де Бройля и скорости частицы.

При попытке гладко деформировать релятивистскую волну де Бройля, имеющую фазовую скорость больше скорости света в вакууме, в волну теории Шредингера, имеющую скорость меньше предельной скорости, нужно гладко менять фазовую скорость волны, проведя ее через световой барьер. При этом длина или период каждой из волн вырождаются и обратятся в бесконечность, т.е. будет иметь место разрыв в волновых параметрах.

Таким образом, для квантовых теорий переход от релятивистской квантовой теории к классической носит скачкообразный характер.

References

1. Sokolov A.A., Loskutov Yu.M., Ternov I.M. Quantum mechanics. — M.: Prosveschenie, 1961. — 638 p.
2. Blokhincev D.I. Foundations of quantum mechanics. — M.: Nauka, 1983. — 664 p.
3. Zheng-Johansson J.X. Internally Electrodynamical Particle Model: Its Experimental Basis and Its Predictions // arXiv:0812.3951v1 [physics.gen-ph] 22 Dec 2008.
4. Pouria Pedram. An approach to construct wave packets with complete classical-quantum correspondence in non-relativistic quantum mechanics // arXiv:0810.3382v2 [quant-ph] 27 Jan 2009.
5. Babin A. and Figotin F. Wave-corpucle mechanics for elementary charges // arXiv:0812.2686v1 [physics.class-ph] 14 Dec 2008.
6. Elyutin P.V., Krivchenkov V.D. Quantum mechanics. — M.: Nauka, 1976. — 333 p.
7. Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics. Vol.3. Quantum mechanics (non relativistic theory). — M.: PhysMathLit, 2001. — 808 p.
8. Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics. Vol. 3. Field theory. — M.: PhysMathLit, 1988. — 510 p.