УДК 512. 815.6

Ш.Ш.Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О третьих когомологиях простых SL_2-модулей

Когомологии третьей степени простых модулей для простых односвязных алгебраических групп в положительной характеристике мало изучены. Они известны для некоторых простых модулей малых размерностей и для простых алгебраических групп ранга 2. Для группы SL_2 полное описание когомологии третьей степени простых модулей не получено. В статье вычислены когомологии третьей степени простых модулей для группы SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$.

Ключевые слова: алгебраическая группа, простой модуль, третья когомология.

Введение. Когомологии простых модулей алгебраических групп над полем положительной характеристики были исследованы в работах Дж.О'Хэллорана [1], Х.Андерсена [2], К.Бенделя, Д.Накано и К.Пиллена [3], А.С.Клещева и Дж.Шета [4, 5], Э.Клайна, Б.Паршаля и Л.Скотта [6, 7], Дж.МакНинча [8], Э.Клайна [9], С. Йехия [10], Дж.Йе [11], Дж.Лиу и Дж.Йе [12], Д.Стюарта [13, 14], А.С.Джумадильдаева и Ш.Ш.Ибраева [15], Ш.Ш.Ибраева [16–20] и группы американских алгебраистов VIGRE [21, 22].

В [1] были описаны когомологии простых модулей со старшими весами в области ограниченных весов. Эти модули являются простыми фактор-модулями модулей Вейля с простыми подмодулями.

Общая формула вычисления расширения двух простых модулей получена Х.Андерсеном в [2]. Она была использована в работах [10–12] для вычисления расширения простых модулей простых алгебраических групп ранга 2. Формулы вычисления расширения простых модулей, полученные для алгебраических групп ранга 2 в [11–12], обобщены в работе [3] для больших характеристик $p \geq 3h-3$, где h — число Кокстера. Когомологии первой степени простых модулей над Sp_{2n} с фундаментальными старшими весами вычислены в работах [4, 5]. Кроме того, они вычислены и для простых модулей с минимальными доминантными старшими весами в [6] и [7]. Последний результат был расширен в [21] для всех доминантных старших весов, меньших или равных фиксированному фундаментальному весу, за исключением некоторых малых характеристик поля, зависящих от системы корней. Расширения простых модулей для SL_2 получены в [9], и когомологии первой степени простых модулей для SO_7 вычислены в [16]. Связь между первой когомологией алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ с коэффициентами в простом модуле и соответствующей первой когомологией ее алгебры Ли изучена в [20], и там же получены необходимые достаточные условия их изоморфности.

В работе МакНинча [8] вычислены вторые когомологии простых модулей, размерности которых не превышают характеристику поля. Развивая методику, примененную в [21], авторами работы [22] были получены аналогичные результаты для вторых групп когомологий простых модулей. Вторые когомологии простых модулей вычислены также для SL_2 [13], SL_3 [14], Sp_4 [19], G_2 [18], SO_7 [17].

Примеры одномерной нетривиальной третьей когомологии содержатся в [1]. В [15] получено полное описание третьих групп когомологий простых модулей для простых односвязных алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике при незначительном ограничении на характеристику поля, исключаются случаи $p = 2, 3$ для A_2; $p = 2, 3, 5$ для B_2; $p = 2, 3, 5, 7, 11$ для G_2. Из основного результата этой работы следует, что размерности пространств когомологий не больше, чем ранг данной алгебраической группы, и существуют двумерные нетривиальные группы третьей когомологии в случаях A_2 и G_2. Как известно, для группы SL_2 ранга 1 аналогичный результат о когомологии третьей степени простых модулей еще не получен. Данная работа посвящена решению этой задачи. Нами найдены все простые G-модули с нетривиальными 3-когомологиями. Согласно полученному нами результату во всех нетривиальных случаях группа третьей когомологии одномерна. Для доказательства основной теоремы (теорема 1) будем использовать методику вычисления, разработанную в [15].

Пусть G — простая односвязная алгебраическая группа SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем F_p поля k. Пусть $G_1 = Ker\,F$, где F — отображение Фробениуса на G.

Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Если R — система корней группы G, то действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, где $s_\alpha \in W$, $\alpha \in R$, и $\alpha^\vee$ — дуальный к α корень. Напомним, что $X(T)$ может быть идентифицирована со множеством целых чисел Z. Тогда множеством доминантных весов будет Z_+. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней $\rho = 1/2\alpha_1 = \lambda_1$ по формуле $w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho$, где $w \in W$, $\lambda \in X(T)$; α_1 — единственный положительный корень системы R; λ_1 — фундаментальный вес.

Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha,np}$ для всех $\alpha \in R_+ = \{\alpha_1\}$ и $n \in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha,np} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T) = \{\lambda \in X(T) \,|\, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in S\} \approx Z_+$ — множество доминантных весов и $X_1(T) = \{\lambda \in X(T) \,|\, 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ для всех } \alpha \in S\} \approx Z_p$ — множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda \in X(T)$ существует одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ — модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda) \approx V(-w_0(\lambda))^*$. Пусть $L(\lambda)$ — простой G-модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны, он простой цоколь $H^0(\lambda)$, а с другой — единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Все три G-модуля, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1-модули, причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1.

Пусть L — рациональный G-модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим скручивание Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G-модуль V, такой что $V^{(d)} = L$, обозначим его через $L^{(-d)}$.

Предварительные сведения. При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

Теорема Стейнберга о тензорном произведении. Для любого $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \cdots + p^m\lambda^m \in X_+(T)$, где $\lambda^i \in X_1(T)$, простой G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ разлагается в виде следующего тензорного произведения:

$$L(\lambda) = L(\lambda^0) \otimes L(\lambda^1)^{(1)} \otimes \cdots \otimes L(\lambda^m)^{(m)}. \qquad (1)$$

Принцип связанности и структура индуцированных модулей. Пусть $\lambda, \mu \in X(T)$. Назовем λ G_1-связанным (G-связанным) с μ, если $\lambda \in W_p \cdot \mu + pX(T)$ $(\lambda \in W_p \cdot \mu)$. Если $H^i(G_1, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G_1-связан с нулевым весом [23], II.9.19. Аналогично, если $H^i(G, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G-связан с нулевым весом [23], II.6.17.

Для $\lambda = a\lambda_1 \in X(T)$ мы будем использовать сокращенное обозначение a. Очевидно, что для G $W_p \cdot 0 + pX(T) \bigcap X_1(T) = \{0, p-2\}$. Согласно [23], II.8.20, $H^0(\lambda) \approx L(\lambda)$, если $\lambda \in X_1(T)$. В частности, $H^0(0) = L(0) \approx k$ и $H^0(p-2) = L(p-2)$.

Когомологии простых модулей для G_1.

Лемма 1 ([13, предложение 2.2.]). Пусть $\lambda \in X_1(T)$, тогда $H^i(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:

(i) $H^{2i}(G_1, k)^{(-1)} \approx H^0(2i)$;

(ii) $H^{2i+1}(G_1, L(p-2))^{(-1)} \approx H^0(2i+1)$.

Расширения модулей для G. Все расширения двух простых модулей для G найдены в [9].

Пусть

$$M(\lambda^0) = \{L(\lambda) \,|\, \lambda \in X_+(T),\ Ext^1_G(L(\lambda^0), L(\lambda)) \neq 0\}, \quad \lambda^0 \in X_1(T).$$

Лемма 2. Пусть $p > 3$. Тогда:

$M(0) = \{L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r \geq 0\}$;

$M(1) = \{L(p-3) \otimes L(1)^{(1)},\ L(1) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$;

$M(2) = \{L(p-4) \otimes L(1)^{(1)},\ L(2) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$.

Во всех перечисленных случаях $Ext^1_G(L(\mu), L(\lambda)) \approx k$.

Вторые когомологии простых модулей для G. Все нетривиальные вторые когомологии найдены в [13, теорема 1]. Пусть

$$M_i = \{L(\lambda^0 + p\mu) \,|\, E_2^{2-i,i} = H^{2-i}(G, H^i(G_1, L(\lambda^0 + p\mu)^{(-1)}) \neq 0, \lambda^0 \in X_1(T), \mu \in X_+(T)\}, i = 0,1,2.$$

Лемма 3. Пусть $p > 3$. Тогда:

(i) $M_2 = \{L(2)^{(1)}\}$;

$M_1 = \{L(p-2) \otimes L(p-3)^{(1)} \otimes L(1)^{(2)}, L(p-2) \otimes L(1)^{(1)} \otimes L(p-2)^{(r+1)} \otimes L(1)^{(r+2)}, r > 0\}$;

$M_0 = \{L(\mu)^{(d)} \,|\, L(\mu) \in M_2 \cup M_1, d > 0\}$;

(ii) $H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{i=0}^{2} M_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$

О композиционном факторе двух модулей Вейля. Пусть $\lambda = a \in X_1(T)$, тогда очевидно, что $V(1) = L(1)$, $V(a) = L(a)$, и согласно [24]

$$L(1) \otimes L(a) \underset{G}{\longleftrightarrow} V(a+1) \oplus V(a-1). \qquad (2)$$

Здесь знак $\underset{G}{\longleftrightarrow}$ означает, что обе стороны этого знака имеют одинаковые G-композиционные факторы.

Предварительные результаты. В дальнейшем нам понадобится информация о структурах цоколя тензорного произведения двух простых модулей. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\mu^0 \in X_1(T)$ и $\Gamma(\mu^0) = \{\varphi \,|\, L(\varphi) \subset Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)\}$ — множество старших весов разложимых компонент $Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)$.

Лемма 4. Пусть $p > 3$ и $0 \in \Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0) = \begin{cases} \{0, 2\}, \text{ если } \quad \mu^0 = 1; \\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно формуле (2) $L(1) \otimes L(\mu^0)$ может иметь композиционный фактор, изоморфный $L(0)$, только в том случае, если $\mu^0 = 1$. Кроме того, $L(1) \otimes L(1) \underset{G}{\longleftrightarrow} V(2) \oplus V(0)$. Так как $V(2) \cong L(2)$ и $V(0) \cong L(0)$, то $L(1) \otimes L(1) \underset{G}{\longleftrightarrow} L(2) \oplus L(0)$. Очевидно, что $L(2) + L(0)$ — разложимый G-модуль. Следовательно, $L(1) \otimes L(1) \cong L(2) \oplus L(0)$ и $L(1) \otimes L(1) \cong Soc_G L(1) \otimes L(1)$.

Лемма 5. Пусть $p>3$ и $p-2\in\Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0)=\begin{cases}\{p-2,\ p-4\}, \text{ если } & \mu^0=p-3;\\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} & \text{случаях.}\end{cases}$$

Доказательство аналогично лемме 4.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [23], I.6.6.(3)

$$E_2^{nm}=H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda))^{(-1)}\right)\Rightarrow H^{n+m}(G,L(\lambda)). \tag{3}$$

Если E_∞^{nm} — стабилизированное значение точек предыдущей спектральной последовательности, то

$$H^i(G,L(\lambda))=\oplus_{n+m=i}E_\infty^{nm}. \tag{4}$$

Пусть $\lambda=\lambda^0+p\mu$, тогда согласно [15, (1.3)]

$$E_2^{nm}\cong H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\mu)\right). \tag{5}$$

Используя формулы (5.15)–(5.20) работы [15], формулу (4) и лемму 1, получим

$$H^3(G,L(\lambda))=E_2^{03}\oplus E_2^{12}\oplus E_2^{21}\oplus E_2^{30}. \tag{6}$$

Пусть $N_i=\{L(\lambda^0+p\mu)\,\big|\,E_2^{3-i,i}=H^{3-i}(G,H^i(G_1,L(\lambda^0+p\mu))^{(-1)})\neq 0\}$, $\quad i=0,1,2,3.$

Лемма 6. Пусть $p>3$. Тогда:

(i) $N_3=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\}$;

(ii) $N_2=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}, L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)}, r\geq 0\}$;

(iii) $N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)}, L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)};$

$$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)}, r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\big|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\ s\geq 1\right\}.$$

Доказательство. (i) Используя определение N_3 и формулу (1), имеем:

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{03}=H^0(G,H^3(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0, \mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,L(3)\otimes L(\mu))\neq 0, \mu\in X_+(T)\}=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\};$$

(ii)

$$N_2=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in M(2)\}=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in\{L(p-4)\otimes L(1)^{(1)}, L(2)\otimes L(p-2)^{(r+1)}\otimes L(1)^{(r+2)}, r\geq 0\}\}=$$

$$=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}, L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)}, r\geq 0\}.$$

Во втором равенстве была использована лемма 2.

(iii) Используя определение N_1 и (1), имеем:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{21}=H^2(G,H^1(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0, \mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu))\neq 0, \mu\in X_+(T)\}=$$

$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0+p\nu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu^0+p\nu))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T), \nu\in X_+(T)\}=$$

$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0, \mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}=$$

$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,Soc_G L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}.$$

Согласно предложению 4.4 [11]

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,(Soc_G L(1)\otimes L(\mu^0))\otimes L(\nu)^{(1)})\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T), \nu\in X_+(T)\}.$$

Наконец, используя леммы 3–5, получим:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)}, L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)};$$

$$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)}, r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\big|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\ s\geq 1\right\}.$$

Лемма 7. Пусть $p>3$. Тогда $N_0=\{L(\mu)^{(s)}\,\big|\,\mu\in N_3\bigcup N_2\bigcup N_1,\quad s>0\}$.

Доказательство.

$$N_0 = \{L(0)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^3(G, H^0(G_1, L(0)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} =$$

$$= \{L(\mu)^{(1)} \mid H^3(G, L(0)\otimes L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} = \{L(\mu)^{(1)} \mid H^3(G, L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\}.$$

Согласно лемме 6 $H^3(G, L(\mu)) \neq 0$, если

$$L(\mu) \in \{L(\mu^0 + p\gamma) \mid E_2^{03} = H^0(G, H^3(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup \{L(\mu^0 + p\gamma) \mid E_2^{12} = H^1(G, H^2(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup \{L(\mu^0 + p\gamma) \mid E_2^{21} = H^2(G, H^1(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1.$$

Следовательно, $N_0 = \left\{ L(\mu)^{(s)} \mid \mu \in N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1, \quad s > 0 \right\}$.

Сформулируем и докажем основную теорему. Сохраняем все обозначения предыдущего пункта.

Теорема 1. *Пусть* $G = SL_2$, $p > 3$ и $L(\lambda)$ — простой G-модуль. Тогда

$$H^3(G, L(\lambda)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup_{i=0}^{3} N_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 кратность вхождения данного неприводимого модуля (при наличии) к соответствующим когомологиям $H^i(G_1, L(\mu))^{(-1)}$, $i = 1, 2, 3$, равна единице. Следовательно, во всех нетривиальных случаях $E_2^{nm} \approx k$.

Согласно лемме 6 множества N_3, N_2, N_1 попарно не пересекаются. Тогда утверждение теоремы следует из формулы (6) и лемм 6 и 7. Доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы

1 *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 399–410.

2 *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.

3 *Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C.* Extensions for finite Chevalley groups II // Trans. AMS. — 2002. — Vol. 354. — № 11. — P. 4421–4454.

4 *Kleshchev A.S., Shet J.* On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 1999. — Vol. 221. — P. 705–722.

5 *Kleshchev A.S., Shet J.* Corrigendum: On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 238. — P. 843–844.

6 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. I // IHES Publ. Math. — 1975. — Vol. 45. — P. 169–191.

7 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. II // J. Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 182–198.

8 *McNinch G.J.* The second cohomology of small irreducible modules for simple algebraic group // Pacific. J. Math. — 2002. — Vol. 204. — № 2. — P. 459–472.

9 *Cline E.* Ext1 for SL_2 // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7. — P. 107–111.

10 *Yehia S. El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup: PhD Thesis. — Warwick, 1982.

11 *Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the group *Sp* (4,*K*) // J. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2 (41). — P. 51–62.

12 *Liu Jia-chun, Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the algebraic group of type *G*2 // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21. — P. 1909–1946.

13 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.

14 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 4702–4716.

15 *Джумадильдаев А.С., Ибраев Ш.Ш.* О третьих когомологиях алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике // Матем. сб. — 2014. — Т. 205. — № 3. — С. 41–82.

16 *Ибраев Ш.Ш.* Первые группы когомологии простых модулей над алгебраической группой типа B_3 в положительной характеристике // Молодой ученый. — 2011. — Т. 2 — № 2 (25). — С. 6–10.

17 *Ибраев Ш.Ш.* Вторые группы когомологии простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — № 3 (63). — С. 16–21.

18 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules for G_2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 381–396.

19 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4\,(k)$ // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 1122–1130.

20 *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — № 4. — С. 512–521.

21 University of Georgia VIGRE Algebra Group. First cohomology for finite groups of Lie type: simple modules with small dominant weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 1025–1050.

22 University of Georgia VIGRE Algebra Group. Second cohomology for finite groups of Lie type // J. Algebra. — 2012. — Vol. 360. — P. 21–52.

23 *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. — Vol. 131. — Boston: Pure and Applied Mathematics, 1987.

24 *Винберг Е.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

Ш.Ш.Ыбыраев

Жай SL_2 -модульдердің үшінші когомологиялары туралы

Оң сипаттамалы жай бір байланысқан алгебралық группалар үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары аз зерттелген. Олар кейбір өлшемі кіші жай модульдер үшін және рангы 2-ге тең жай алгебралық группалар үшін белгілі. SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологияларының толық сипаттамасы әлі алынбаған. Мақалада сипаттамасы $p > 3$ алгебралық тұйық k өрісіндегі SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары есептелген.

Sh.Sh.Ibrayev

On the third cohomology of simple SL_2 -modules

The third cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic groups in the positive characteristic are only a few investigated. They are well-known for some simple modules of small dimension and for the simple algebraic groups of rank 2. The third cohomology groups of simple modules for SL_2 has not studied yet. In this paper the third cohomology groups of simple modules for SL_2 over algebraically closed field k of characteristic $p > 3$ are calculated.

References

1 O'Halloran J. *Amer. J. Math.*, 1981, 103, p. 399–410.

2 Andersen H.H. *Amer. J. Math.*, 1984, 106, p. 489–504.

3 Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, 354, 11, p. 4421–4454.

4 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 1999, 221, p. 705–722.

5 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 2001, 238, p. 843–844.

6 Cline E., Parshal B., Scott L. *IHES Publ. Math.*, 1975, 45, p. 169–191.

7 Cline E., Parshal B., Scott L. *J. Algebra*, 1977, 45, p. 182–198.

8 McNinch G.J. *Pacific. J. Math*, 2002, 204, 2, p. 459–472.

9 Cline E. *Ext1 for SL_2, Commun. Algebra*, 1979, 7, p. 107–111.

10 Yehia S.El. *Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup*, Warwick: PhD Thesis, 1982.

11 Ye Jia-chen. *J. London Math. Soc.*, 1990, 2 (41), p. 51–62.

12 Liu Jia-chun, Ye Jia-chen. *Commun. Algebra*, 1993, 21, p. 1909–1946.

13 Stewart D.I. *Proc. Amer. Math. Soc*, 2010, 138, p. 427–434.

14 Stewart D.I. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 4702–4716.

15 Dzhumadil'dayev A.S., Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Sbornic*, 2014, 205, 3, p. 41–82.

16 Ibrayev Sh.Sh. *Young scientist*, 2011, 2, 2 (25), p. 6–10.

17 Ibrayev Sh.Sh. *Bull. Karagand. un-ta Ser. Matematics*, 2011, 3 (63), p. 16–21.

18 Ibrayev Sh.Sh. *Sib. Electron. Matem. Izv.*, 2011, 8, p. 381–396.

19 Ibrayev Sh.Sh. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 1122–1130.

20 Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Zametki*, 2014, 96, 4, p. 512–521.

21 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013, 365, p. 1025–1050.

22 *J. Algebra*, 2012, 360, p. 21–52.
23 Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups*, Boston, Pure and Applied Mathematics, 131, 1987.
24 Vinberg Ye.B., Onishchik A.L. *Seminar po gruppam Li i algebraicheskim gruppam*, Moscow: Nauka, 1988.

УДК 510.52 + .58

И.В.Латкин[1], А.В.Селиверстов[2]

[1]Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск;
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
(E-mail: slvstv@iitp.ru)

Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел

В статье обсуждена вычислительная сложность формул в предварённой форме с ограничением на число перемен кванторов. В частности, говорится о теории алгебраически замкнутых полей. Доказано, что распознавание вершин многомерного куба на гиперплоскости сводится к распознаванию особых точек на гиперповерхности, построенной за полиномиальное время. Более того, доказаны некоторые соотношения между классами сложности. Даны рекомендации по улучшению концепции сложности, а также связи с теорией моделей.

Ключевые слова: вычислительная сложность, теория первого порядка, комплексные числа, перемена кванторов, иерархия классов.

1. Введение. Оптимизация функционала на множестве вершин многомерного куба является важной задачей, имеющей практические приложения в народном хозяйстве. Конкретные примеры и обычно используемые методы решения можно найти в работах [1–3]. Мы продемонстрируем сводимость таких задач к исследованию решений систем алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем, которые легко интерпретируются в соответствующем языке первого порядка. Ввиду этого мы рассмотрим также разрешающие алгоритмы для фрагментов теории поля комплексных чисел, состоящих из формул, которые представимы в предварённой форме с числом перемен кванторов, ограниченной некоторой фиксированной величиной. Практическая ценность такого перехода объясняется возможностью более эффективного использования стандартных пакетов программ для символьных вычислений. Среди них Maple и свободно распространяемый пакет SINGULAR (http://www.singular.uni-kl.de). Поскольку многие задачи дискретной оптимизации являются алгоритмически трудными, поиск новых методов решения и эффективное использование готовых пакетов программ могут сократить как время работы вычислительных устройств, так и усилия, необходимые для разработки алгоритмов и отладки их программной реализации.

При формализации многих комбинаторных задач возникают универсально-экзистенциальные формулы. Последнее обстоятельство играет важную роль, в частности, они остаются истинными при переходе к индуктивному пределу, что позволяет использовать методы теории моделей [4, 5] при работе с алгебраически незамкнутыми полями. Покажем это на простом примере. Поле комплексных чисел элементарно эквивалентно алгебраическому замыканию поля рациональных чисел, которое является индуктивным пределом конечных алгебраических расширений. Поэтому замкнутая универсально-экзистенциальная формула, истинная в каждом конечном расширении поля рациональных чисел, будет истинной в поле комплексных чисел. Возможность выразить нужное свойство универсально-экзистенциальной формулой существенно зависит от класса иерархии, которому принадлежит задача распознавания. Поэтому методы теории моделей оказываются тесно связанными с исследованием вычислительной сложности.

2. Применение базисов Грёбнера. Напомним, что каждая полная рекурсивно аксиоматизируемая теория первого порядка разрешима. Примерами таких теорий служат теория алгебраически замкнутого поля фиксированной характеристики, теория вещественно замкнутых полей, теория плотных