ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Алибиев Д.Б., Кажикенова А.Ш., Кауымбек И.С., Сейтимбетова А.Б.
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: dalibiev@mail.ru

В данной работе рассмотрен экономичный итерационный метод для одного класса операторных разностных уравнений. С помощью общей теории проведен анализ сходимости итерационного метода для численного решения стационарной задачи (1),(2) и (1),(3):

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (u\nabla)\omega = v\Delta\vec{\omega} + rot\,\vec{f}$$

$$\Delta\varphi = \omega, u = \varphi_y, v = -\varphi_x \qquad (1)$$

$$\omega\,|_{t=0} = u_y - v_{x|_{t=0}} = u_{ox} - v_{0y} = \omega_0(x,y)$$

$$\varphi/\gamma = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_\gamma = 0 \qquad (2)$$

где φ- функция тока, ω - вихрь скоростей.

Если область ϖ - это многосвязные области $\gamma_i = \partial\varpi_i$, непересекающие границы ϖ, то система уравнений (1) решается с условиями $\omega\,|_{t=0} = u_0(x)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega\varpi} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0,\ \oint_{\partial\varpi\Omega_i}\frac{\partial\omega}{\partial n}\partial l = 0. \qquad (3)$$

где n - нормаль границы $\partial\varpi, \tau$ - касательный вектор.

Так же рассматривается система операторно-разностных уравнений вида

$$I(\omega,\varphi) + A\omega + B\omega = f \qquad (4)$$

$$A\varphi = \omega.$$

где операторы А,В и нелинейная форма $I(\omega,\varphi)$ считаются заданными на всем пространстве Н.

Вычисления проведены в предположении, что система уравнений [1]

$$\frac{dv}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = v\Delta\vec{v} + \nabla p + \vec{f}$$

$$div\,\vec{v} = 0$$

с начальными граничными условиями

$$\vec{v}\,|_{t=0} = \overrightarrow{v_0}(0)$$

$$\vec{v}\,|_{\partial\Omega} = \overrightarrow{v_0}(0)$$

определяется при выполнении следующих условий:

а) А - самосопряженный оператор, А: Н→Н, и существуют числа $\beta_1 > 0$, β_2 такие,что, $\beta_1 E \le A \le \beta_2 E$, т.е. А=А*, $\beta_1\|x\|^2 \le (Ax,x) \le \beta_2\ \|x\|^2$ для любого $x \in H$.

б) Оператор В - линейный и неотрицательный, т.е. $(Bx,x) \ge O$, для любого $x \in H$.

в) нелинейная форма $I(\omega,\varphi)$ является билинейной, т.е. по каждому аргументу (ω,φ) является линейным и удовлетворяет тождеству $(I(\omega,\varphi),\varphi) = 0$, которое справедливо для любых ω и φ из Н.

Здесь $\vec{v} = (u;v;\omega)$ - поле скоростей, p - поле давления, $\vec{f}$ - поле массовой силы, v – коэффициент вязкостей. Кроме того, относительно билинейной формы $I(\omega,\varphi)$, предположили, что справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}(\omega,\varphi),\ v\,| \le \mathrm{C}\left|\left|\varphi\right|\right|_A * \left|\left|\omega\right|\right| * \left|\left|Av\right|\right|$$

где H_A- пространство, порожденное оператором А.

Для численной реализации решения системы уравнений (4) был рассмотрен следующий итерационный процесс:

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} + I\left(\omega^n, \varphi^{n+1/2}\right) + A\omega^n + B\varphi^{n+1/2} = f.$$

$$A\varphi^{n+1/2} = \omega^{n+1/2}$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} + A(\omega^{n+1} - \omega^n) = 0$$

$$A\varphi^{n+1} = \omega^{n+1}.$$

Список использованных источников

1. *Алибиев Д.Б., Данаев Н.Т., Смагулов Ш.* Об итерационном методе решения одного класса операторно-разностных уравнений. - М.1993. - 30с. -Деп. КазНИИНКИ. рег. №4323 - Ка93. 24.06.93.