УДК 517.956, 517.968.2

Решение одного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

Solution of a singular Volterra integral equation of second kind

Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: ramatur@mail.ru)

Мақалада Вольтерра типінің сингулярлы интегралдық екінші текті тұйық түрде шешімі алынды. Карлеман-Векуа регулярлы әдісі қолданылған, яғни характеристикалық интегралдық теңдеулерінің шешіміне тең келетін және зерттелетін теңдеуді екінші текті Абель интегралдық теңдеуіне келтіру. Берілген интегралдық теңдеу көптеген авторлармен зерттелген, бірақ онда t-ның аз мәнінде асимптотикалық шешімі табылған болатын.

In this paper the solution of the singular Volterra integral equation of second kind in closed form is obtained. The method of Carleman-Vekua regularization is applied by the solution of a corresponding characteristic integral equation and by the reduction of the original investigated equation to an Abel integral equation of the second kind. This integral equation was studied by many authors, who found only the asymptotic solution for small values t.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(t)-\int\limits_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad (t>0),\tag{1}$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\right\}.$$

Ядро $\mathrm{K}(t,\tau)$ обладает свойством

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau=1.$$

Особенность исследуемого (сингулярного) уравнения заключается именно в этом свойстве ядра $K(t,\tau)$ и выражается в том, что соответствующее неоднородное уравнение не может быть решено методом последовательных приближений. Уравнения такого типа впервые рассмотрены в [1, 2], в которых изучалась асимптотика интегралов типа потенциалов двойного слоя и построены приближенные решения некоторых прикладных задач [2]. В [2] предложен и обоснован метод, в котором решение интегрального уравнения представляется в виде асимптотического разложения по полуцелым степеням переменной t. И в дальнейшем интегральное уравнение (1) было объектом исследования многих авторов.

Также нужно отметить, что к подобного рода особым интегральным уравнениям сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженного параболического уравнения, когда линия нагрузки движется по закону $x=t$ [3–5].

Используя соотношения

$$t+\tau=2t-(t-\tau);\quad \frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}=\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}+\frac{t-\tau}{4a^2},$$

интегральное уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\varphi(t)-\int\limits_0^t\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}-\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t).\tag{2}$$

Замечание [6; 183].

Если решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)\, f(t)\, dt,$$

то решение уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x,t)\, e^{\alpha(x-t)} y(t)\, dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)\, e^{\alpha(x-t)} f(t)\, dt.$$

Поэтому, в силу данного замечания, достаточно найти решение «упрощенного» уравнения:

$$\varphi(t) - \int_0^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{3}$$

где

$$k(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\left(1 - \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)\right\}.$$

Для исследования «полного» уравнения (3) выделим его характеристическую часть, а именно:

$$\varphi(t) - \int_0^t k_o(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f_1(t), \tag{4}$$

где

$$k_o(t,\tau) = \frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\};$$

$$f_1(t) = f(t) + \int_0^t k_h(t,\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau; \tag{5}$$

$$k_h(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\left(1 - \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right).$$

Уравнение (4) является характеристическим для (3), так как справедливы соотношения

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t k_o(t,\tau)\, d\tau = 1; \ \lim_{t\to 0}\int_0^t k_h(t,\tau)\, d\tau = 0.$$

Аналогично [7], считая правую часть уравнения (4) известной, найдем его решение, т.е. решение характеристического уравнения:

$$\varphi(t) = f_1(t) + \int_0^t r(t,\tau)\, f_1(\tau)\, d\tau + \frac{C}{\sqrt{t}}, \tag{6}$$

где

$$r(t,\tau) = \frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\exp\left\{-n^2\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}. \tag{7}$$

Найдем оценку для резольвенты. Так как

$$|\theta|^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2|\theta|}\right\} \le \frac{a^2}{2\sqrt{|\theta|}}\int_1^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{a^2|\theta|}\right\} d\left(\frac{y^2}{a^2|\theta|}\right) = \frac{a^2}{2\sqrt{|\theta|}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2|\theta|}\right\},$$

то

$$\left|r(t,\tau)\right| \le \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\tau\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2\left(t-\tau\right)}\right\}.$$

Значит, необходимым условием на функцию $f_1(t)$ будет

$$\left|f_1(t)\right| \le M \cdot t^{\varepsilon}; \quad \varepsilon > 0.$$

Теперь приступаем к решению уравнения (3), т.е. к «упрощенному» варианту исходного уравнения (1).

Используя формулу решения характеристического уравнения (6), с учетом выражения (5) для функции $f_1(t)$ получим:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)\varphi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t r\left(t,\tau\right)\left(f(\tau) + \int_0^\tau \frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(\tau-\tau_1\right)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau\tau_1}{a^2(\tau-\tau_1)}\right\}\right)\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\right)d\tau + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части полученного уравнения и поменяв ролями τ и τ_1, будем иметь:

$$\varphi(t) = \int_0^t \left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right) + \int_\tau^t r\left(t,\tau_1\right)\frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(\tau_1-\tau\right)}} \times \right.$$
$$\left. \times\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1\right\}\varphi(\tau)\,d\tau + f(t) + \int_0^t r\left(t,\tau\right)f(\tau)\,d\tau + \frac{C}{\sqrt{t}}. \qquad (8)$$

Вычислим внутренний интеграл в (8):

$$J\left(t,\tau\right) = \int_\tau^t r\left(t,\tau_1\right)\frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(\tau_1-\tau\right)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1 =$$

$$= \frac{t}{2a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_\tau^t \frac{n}{\left(t-\tau_1\right)^{3/2}\sqrt{\left(\tau_1-\tau\right)}}\exp\left\{-n^2\frac{t\tau_1}{a^2(t-\tau_1)}\right\}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1,$$

или

$$J\left(t,\tau\right) = \frac{t}{2a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\int_\tau^t \frac{1}{\left(t-\tau_1\right)^{3/2}\sqrt{\left(\tau_1-\tau\right)}}\exp\left\{-n^2\frac{t\tau_1}{a^2(t-\tau_1)}\right\}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1 =$$

$$= \frac{t}{2a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot I_n(t,\tau). \qquad (9)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_n(t;\tau) = \int_\tau^t \frac{1}{\left(t-\tau_1\right)^{3/2}\left(\tau_1-\tau\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n^2 t\,\tau_1}{a^2(t-\tau_1)}\right\}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1 = I_n^{(1)}(t;\tau) - I_n^{(2)}(t;\tau),$$

где

$$I_n^{(1)}(t;\tau) = \int_\tau^t \frac{1}{\left(t-\tau_1\right)^{3/2}\left(\tau_1-\tau\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n^2 t\,\tau_1}{a^2(t-\tau_1)}\right\}d\tau_1;$$

$$I_n^{(2)}(t;\tau) = \int_\tau^t \frac{1}{\left(t-\tau_1\right)^{3/2}\left(\tau_1-\tau\right)^{1/2}}\exp\left\{-\left(\frac{n^2 t\,\tau_1}{a^2(t-\tau_1)} + \frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right)\right\}d\tau_1.$$

Вычислим интегралы $I_n^{(1)}(t;\tau)$ и $I_n^{(2)}(t;\tau)$.

Произведем замену:

$$z = \sqrt{\frac{\tau_1-\tau}{t-\tau_1}}.$$

После подстановки последние интегралы примут вид

$$I_n^{(1)}(t;\tau)=\frac{2}{t-\tau}\exp\left\{-\frac{n^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{n^2t^2z^2}{a^2(t-\tau)}\right\}dz;$$

$$I_n^{(2)}(t;\tau)=\frac{2}{t-\tau}\exp\left\{-\frac{(n^2+1)t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{n^2t^2}{a^2(t-\tau)}\cdot z^2-\frac{\tau^2}{a^2(t-\tau)}\cdot\frac{1}{z^2}\right\}dz.$$

Теперь, используя замену $\xi=\dfrac{ntz}{a\sqrt{t-\tau}}$ для первого интеграла, получим:

$$I_n^{(1)}(t;\tau)=\frac{2}{t-\tau}\exp\left\{-\frac{n^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\frac{a\sqrt{t-\tau}}{nt}\int_0^\infty \exp\left\{-\lambda^2\right\}d\lambda=\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

При вычислении второго интеграла используем известный результат:

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\mu x^2-\frac{\eta}{x^2}\right\}dx=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}}\exp\left\{-2\sqrt{\mu\eta}\right\}.$$

Тогда

$$I_n^{(2)}(t;\tau)=\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{(n^2+1)t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\exp\left\{-2\cdot\frac{nt\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}=\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{(n+1)^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

Итак,

$$I_n(t;\tau)=I_n^{(1)}(t;\tau)-I_n^{(2)}(t;\tau)=\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{t-\tau}}\left(\exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(n+1)^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right).$$

Подставив это соотношение в равенство (9), получим:

$$J(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(n+1)^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\varphi(t)=\int_0^t\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+f(t)+\int_0^t r(t,\tau)f(\tau)d\tau+\frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Окончательно, после введения обозначения

$$f_2(t)=f(t)+\int_0^t r(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где $r(t,\tau)$ определяется формулой (8), получим:

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=f_2(t)+\frac{C}{\sqrt{t}}. \qquad (10)$$

Таким образом, исходное «упрощенное» интегральное уравнение (3) свелось к уравнению (10), которое является интегральным уравнением Абеля второго рода.

Вначале найдем решение уравнения Абеля (10) при $f_2(t)=0$, т.е. найдем решение соответствующего однородного уравнения (3) (собственную функцию). При этом условии уравнение (10) имеет вид

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Решение последнего уравнения запишем в виде [6; 117], [8; 295–298]

$$\varphi(t)=F(t)+\frac{1}{4a^2}\int_0^t\exp\left[\frac{t-\tau}{4a^2}\right]F(\tau)d\tau,$$

где

$$F(t)=C\times\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\right\}=C\times\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}.$$

Тогда

$$\varphi(t)=C\times\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}+\frac{1}{4a^2}\int_0^t\exp\left[\frac{t-\tau}{4a^2}\right]\times\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right)d\tau\right\}=$$

$$=C\times\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}+\frac{C}{4a^2}\exp\left[\frac{t}{4a^2}\right]\left\{\int_0^t\exp\left[-\frac{\tau}{4a^2}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^t\exp\left[-\frac{\tau}{4a^2}\right]d\tau\right\}.$$

После упрощений получим:

$$\varphi(t)=C\times\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}\right\} \tag{11}$$

— решение уравнения Абеля (10) при $f_2(t)=0,$ т.е. решение однородного «упрощенного» уравнения (3). Здесь

$$erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz.$$

Таким образом, собственная функция «упрощенного» уравнения (3), определяемая равенством (11), имеет вид

$$\varphi_0(t)=C\times\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}\right). \tag{12}$$

Теперь найдем решение неоднородного «упрощенного» уравнения (3), которое свелось к уравнению Абеля (10).

Учитывая обозначение $f_2(t)=f(t)+\int_0^t r(t,\tau)f(\tau)d\tau,$ решение уравнения (3) будет иметь вид [6; 117], [8; 295–298]:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t r(t,\tau)f(\tau)d\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\left\{\int_0^\tau r(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^t\exp\left(\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\left\{f(\tau)+\int_0^\tau r(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\frac{f(\tau_1)}{\sqrt{\tau-\tau_1}}d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\left\{\int_0^{\tau_1}r(\tau_1,\tau_2)f(\tau_2)d\tau_2\right\}\frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau-\tau_1}}\right\}d\tau+\varphi_0(t),$$

где $\varphi_0(t)$ определяется формулой (12).

Окончательно решение неоднородного «упрощенного» уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t R(t,\tau)f(\tau)d\tau+\varphi_0(t), \tag{13}$$

где

$$R(t,\tau)=\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}+$$

$$+\frac{1}{2a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{n^2\tau t}{a^2(t-\tau)}\right\}+\pi n\cdot\exp\left\{-\frac{\tau n^2}{a^2}\right\}erfc\left(\frac{n\tau}{a\sqrt{t-\tau}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\exp\left(\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\left\{1+erf\left(\frac{\sqrt{t-\tau}}{2a}\right)\right\}+\int_{\tau}^{t}\left\{\frac{\tau_1}{2a^2\left(\tau_1-\tau\right)^{3/2}}\exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{4a^2\sqrt{\tau_1-\tau}}\exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}\exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-\frac{\tau n^2}{a^2}\right\}erfc\left(\frac{n\tau}{a\sqrt{\tau_1-\tau}}\right)\right\}d\tau_1. \quad (14)$$

Здесь

$$erfc\left(t\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{\infty}e^{-z^2}dz.$$

Согласно замечанию решение исходного интегрального уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t)=f(t)+\int_{0}^{t}R(t,\tau)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}f(\tau)\,d\tau+e^{-\frac{t}{4a^2}}\varphi_0(t), \quad (15)$$

где $R(t,\tau)$ и $\varphi_0(t)$ определяются формулами (14) и (12) соответственно.

References

1. *Kim E.I.* Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals // Dokl. Akad. nauk SSSR (N.S). — 1957. — Vol. 113. — P. 24–27.
2. *Kharin S.N.* Themal processes in electrical contacts and the associated singular integral equations: Dis. for degree of PhD doctor. — IMM Acad. nauk KazSSR, 1968. — 13 p.
3. *Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A.* About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Bulletin KarSU. Ser. Mathematics — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.
4. *Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A.* About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator II // Bulletin KarSU. Ser. Mathematics. — 2011. — № 3 (63). — P. 56–62.
5. *Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical J. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 3–14.
6. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Integral Equations. — M.: Fizmatlit, 2003. — P. 608.
7. *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* Loaded equations are as a perturbation of differential equations. — Almaty: Gylym, 2010. — P. 174.
8. *Brakhage K., Nickel K., Rieder P.* Auflosung der Abelschen Integralgleichung 2. Art. // ZAMP. 1965. — Vol. 16. — Fasc. 2. — P. 295–298.