

## References

- 1 [ER]. Access mode: <http://perevod.nur.kz/ru-kz.html>
- 2 Behnken Ye. *PHP, MySQL, XML programming for interneta*, Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2007, 306 p.
- 3 Leshchev D.V. *Flash MX 2004. Theory and Practice. Teach*, Saint Petersburg: Peter, 2004, 362 p.
- 4 Mayorov A.N. *Theory and practice of creating tests for the system education*, Moscow: Intelligence Center, 2001, 145 p.
- 5 Reinhard R., Lott. D. *Macromedia Flash MX ActionScript. Users: Bible* translated from Engl., Moscow: Publ. House «Williams», 2009, 1280 p. il.-paral.tit.engl.

УДК 531.88

Т.Х.Макажанова

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова  
(E-mail: orumbayevan@mail.ru)*

### Об условии компактности в пространстве звездных множеств

В статье исследовано пространство  $S(X)$  звездных множеств конечномерного евклидова пространства, являющегося упорядоченным нормированным пространством. Получены условия компактности в  $S(X)$  для подмножеств, состоящих из выпуклых звездных множеств.

*Ключевые слова:* звездное множество, калибровочная функция, выпуклость, компактность.

В работе [1] построено упорядоченное нормированное пространство  $S(X)$  звездных подмножеств конечномерного евклидова пространства  $X = R^n$  и изоморфное ему пространство  $K(X)$  калибров звездных множеств.

Примем обозначения:  $clM$  — замыкание;  $int M$  — внутренность;  $frM$  — граница множества  $M \subset X$ .

Напомним  $U$  — звездное множество в  $X \Leftrightarrow U$ -замкнутом подмножестве,  $0 \in int U$ : каждый луч  $Lx = \{\lambda x, \lambda \geq 0\} \forall x \in X$  пересекает границу  $U$  не более чем в одной точке.

Функция  $Pu(x) = \inf \{\lambda > 0: x \in \lambda U\} \forall x \in X$  называется калибром множества  $U$ .

При этом  $P$  — калибр  $\Leftrightarrow P$  — положительно однородная неотрицательная непрерывная функция на  $X$  ([1]).

Отметим, что соответствие  $\varphi: S(X) \rightarrow K(X), U \rightarrow Pu$ , где  $U = \{x \in X: Pu(x) \leq 1\}$  является биекцией.

Пусть  $|x|$  — евклидова норма элемента  $x$  в  $X = R^n$ ,  $B_0 = \{x \in X: |x| \leq 1\}$  — единичный шар в  $X$ , тогда  $P_{B_0} = | \cdot |$ , а если  $B = B(0, r) = \{x \in X: |x| \leq r\}$ , то  $P_B = \frac{1}{r} | \cdot |$  и  $P_B$  является нормой в  $X$ .

Нетрудно заметить, что если  $U$  — выпуклое звездное множество, то  $Pu$  — выпуклая функция.

Под 0-симметричным множеством в  $X$  будем понимать множество, симметричное относительно 0.

Если  $U$  — звездное,  $0$  — симметричное множество, то легко увидеть, что  $Pu(x) = Pu(-x) \forall x \in X$ , и, наоборот, если  $Pu(x) = Pu(-x) \forall x \in X$ , то  $U$  — 0-симметричное.

Для звездных множеств вводятся алгебраические инверсные операции  $U_1 \oplus U_2 = cl \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha U_1 \cap (1-\alpha)U_2]$  сложения и  $\alpha \otimes U = \frac{1}{\alpha}U$ , ( $\alpha \geq 0$ ) умножения на неотрицательные числа. Упорядочение звездных множеств определяется соотношением  $U_1 \geq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subset U_2$ .

При рассмотрении во множестве калибров  $K(X)$  операций  $(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x)$  и  $(\alpha P)(x) = \alpha P(x) \forall x \in X$  и отношения порядка  $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_1(x) \leq P_2(x) \forall x \in X$  мы продолжим биекцию  $\varphi: S(X) \rightarrow K(X)$  до алгебраического и порядкового изоморфизма  $S(X)$  и  $K(X)$ . При этом  $S(X)$  и  $K(X)$  становятся конусами.

Поскольку калибры положительно однородны, то  $K(X)$  можно отождествлять с конусом  $C_0^+(B_0)$  — неотрицательных, положительно однородных, непрерывных функций на единичном шаре  $B_0$  в  $X$ .

Построенное далее в [1] упорядоченное нормированное пространство  $T(X)$  звездных множеств позволяет рассматривать  $S(X)$  как конус в  $T(X)$  с нормой, определяемой по формуле  $\|U\| = \inf \{ \lambda > 0 : \lambda U \supset B_0 \}$ , соответственно,  $\|P\| = \max_{x \in R^n} \frac{P(x)}{|x|} = \max_{x \in B_0} P(x) \forall P \in K(X)$ . (Здесь и далее при рассмотрении  $\|P\|$  считаем  $x \neq 0$ ).

*Замечание 1.* Покажем, что  $\|U\| = \|Pu\| \forall u \in S(X)$ . По определению

$$\|U\| = \inf \{ \lambda > 0 : \lambda U \supset B_0 \} = \inf \left\{ \lambda > 0 : U \supset \frac{1}{\lambda} B_0 \right\} = \inf \{ \lambda > 0 : U \supset \lambda \otimes B_0 \} = \inf \{ \lambda > 0 : U \leq \lambda \otimes B_0 \}.$$

Если  $U \leq \lambda \otimes B_0 \Rightarrow Pu \leq \lambda \cdot B_0 = \lambda |$  в силу порядкового изоморфизма  $\varphi$ .

Согласно определению  $\|Pu\| = \max_{x \in R^n} Pu(x) \leq \lambda \max_{x \in B_0} |x| = \lambda$ , тогда

$$\|Pu\| \leq \inf \{ \lambda > 0 : U \leq \lambda \otimes B_0 \} = \|U\|.$$

С другой стороны, если  $\lambda_0 = \|Pu\| = \max_{x \in R^n} \frac{Pu(x)}{|x|} \geq \frac{Pu(x)}{|x|} \forall x \in R^n \Rightarrow Pu(x) \leq \lambda_0 |x| \forall x \in R^n$ , т.е.

$Pu \leq \lambda_0 |$ , откуда и  $U \leq \lambda_0 \otimes B_0$ , тогда  $\|U\| = \inf \{ \lambda > 0 : U \leq \lambda \otimes B_0 \} \leq \lambda_0 = \|Pu\|$ .

Таким образом, биекция  $\varphi: S(X) \rightarrow K(X)$  является изометрией.

*Замечание 2.* Очевидно,  $\|B_0\| = \| | \| = 1$ , и если  $B = B(0, r) = r \cdot B_0 = \frac{1}{r} \otimes B_0$ , то  $\|B\| = \frac{1}{r}$ .

*Замечание 3.* Если  $U_1 \supset U_2 \Rightarrow \|U_1\| \leq \|U_2\|$ . Действительно, условие  $U_1 \supset U_2 \Leftrightarrow U_1 \leq U_2$ , откуда  $Pu_1 \leq Pu_2$  и  $\|U_1\| = \|Pu_1\| = \max_{x \in B_0} Pu_1(x) \leq \max_{x \in B_0} Pu_2(x) = \|Pu_2\| = \|U_2\|$ .

Если  $U \supset B = B(0, r)$ , то  $\|U\| = \|B\| = \frac{1}{r}$ .

*Предложение.* Пусть  $\Sigma = \{U \text{-звездные выпуклые } 0\text{-симметричные}\}$ ,  $\exists B = B(0, r) \subset U \forall U \in \Sigma \Rightarrow \Sigma$ -выпуклое компактное множество в  $S(X)$ .

*Доказательство.* В силу отмеченной выше изометричности  $\varphi$  (т.е. гомеоморфности  $S(X)$  и  $K(X)$ ) компактность  $\Sigma$  в  $S(X)$  равносильна компактности  $\Sigma_p = \{Pu, U \in \Sigma\} = \{P \in K(X), P \text{ — выпуклая, } P(x) = P(-x), \|P\| \leq \frac{1}{r}\}$ . Из включения  $B \subset U$  и замечания 3  $\|Pu\| \leq \frac{1}{r} \forall U \in \Sigma$ , но  $\|Pu\| = \max_{x \in B_0} P_u(x) \leq \frac{1}{r} \forall U \in \Sigma$ , т.е. множество непрерывных функций  $\Sigma_p$  равномерно ограничено на выпуклом компактном шаре  $B_0$  в  $X$ , т.е. в  $C(B_0)$ , где  $C(B_0) = \{f \text{ — непрерывные функции на } B_0\}$ ,  $\|f\| = \max_{x \in B_0} |f(x)| \forall f \in C(B_0)$ .

Как было отмечено выше, калибры выпуклых звездных 0-симметричных множеств выпуклы, (т.е.  $P(\alpha x) = \alpha P(x) \forall \alpha \geq 0 \forall x$ ,  $P(x+y) \leq P(x) + P(y) \forall x, y \in X$ ) и  $P(x) = P(-x) \forall x \in X$  в силу 0-симметричности множеств.

Покажем, что множество  $\sum_p$  равномерно непрерывно в  $C(B_0)$ , т.е. выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |Pu(x_1) - Pu(x_2)| < \varepsilon \quad \forall U \in \Sigma \quad \forall x_1, x_2 \in B_0 : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon.$$

В силу выпуклости калибров  $Pu$  имеем  $Pu(x_1) = Pu(x_1 - x_2 + x_2) \leq Pu(x_1 - x_2) + Pu(x_2)$  или  $Pu(x_1) - Pu(x_2) \leq Pu(x_1 - x_2)$ ,  $Pu(x_2) = Pu(x_2 - x_1 + x_1) \leq Pu(x_2 - x_1) + Pu(x_1)$  или  $Pu(x_2) - Pu(x_1) \leq Pu(x_2 - x_1)$ , откуда  $Pu(x_1) - Pu(x_2) \geq -Pu(x_2 - x_1)$ .

Таким образом, мы получили неравенства  $-Pu(x_2 - x_1) \leq Pu(x_1) - Pu(x_2) \leq Pu(x_1 - x_2)$ , но  $Pu(x_2 - x_1) = Pu(x_1 - x_2)$ , т.е.  $-Pu(x_1 - x_2) \leq Pu(x_1) - Pu(x_2) \leq Pu(x_1 - x_2)$  или  $|Pu(x_1) - Pu(x_2)| \leq Pu(x_1 - x_2)$ .

В силу положительной однородности

$$Pu(x_1 - x_2) = Pu\left(|x_1 - x_2| \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}\right) = |x_1 - x_2| Pu\left(\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}\right),$$

где  $\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \in B_0$ , т.е.  $Pu\left(\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}\right) \leq \|Pu\|$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , полагая  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon \cdot r$ , имеем

$$|Pu(x_1) - Pu(x_2)| \leq Pu(x_1 - x_2) = |x_1 - x_2| Pu\left(\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}\right) \leq |x_1 - x_2| \|Pu\|,$$

но  $\|Pu\| \leq \frac{1}{r} \quad \forall u \in \Sigma$ , поэтому  $|Pu(x_1) - Pu(x_2)| \leq \delta_\varepsilon \cdot \frac{1}{r} < \frac{\varepsilon \cdot r}{r} = \varepsilon$ , если  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ .

Пусть  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$  — пространство непрерывных функций, отображающих компактный шар

$B_0 = B(0, 1)$  в числовой компакт  $\left[0, \frac{1}{r}\right]$ , наделенное нормой  $\|f\| = \max_{x \in B_0} |f(x)|$ .

Множество  $\sum_p \subset C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$  и, как показано выше,  $\sum_p$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно в  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$ , тогда по теореме Арцела-Асколи [2] множество  $\sum_p$  является относительно компактным в  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$ .

Осталось показать, что  $\sum_p$  замкнуто по норме в  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$ .

Пусть  $\{Pu_n\}_n \subset \sum_p$  и  $Pu_n \rightarrow P$ , (т.е.  $\|Pu_n - P\| \rightarrow 0$ ) в  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$ . Как известно, сходимость по норме в  $C\left(B_0, \left[0, \frac{1}{r}\right]\right)$  является равномерной сходимостью, т.е.  $\lim Pu_n(x) = P(x) \quad \forall x \in B_0$ , и  $P$  является непрерывной на  $B_0$  функцией.

При этом  $\|P\| = \|P - Pu_n + Pu_n\| \leq \|P - Pu_n\| + \|Pu_n\|$ , откуда  $\|P\| \leq \lim \|P - Pu_n\| + \lim \|Pu_n\| \leq \frac{1}{r}$ .

Очевидно, что  $P(\alpha x) = \lim Pu_n(\alpha x) = \alpha \lim Pu_n(x) = \alpha P(x)$ ;  $P(x + y) = \lim Pu_n(x + y) \leq \lim (Pu_n(x) + Pu_n(y)) = \lim Pu_n(x) + \lim Pu_n(y) = P(x) + P(y) \quad \forall x, y \in B_0$ , т.е.  $P$  — выпуклая функция на  $B_0$ .

Кроме того,  $P(-x) = \lim P u_n(-x) = \lim P u_n(x) = P(x) \forall x \in B_0$ . Распространив  $P$  на всё  $X$  по формуле  $P(0) = 0$  и  $P(x) = P\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| P\left(\frac{x}{|x|}\right)$ , где  $\frac{x}{|x|} \in B_0, x \neq 0$ , получим, что  $P$  — неотрицательная, положительно однородная функция на  $X$  и  $P(x) = P(-x) \forall x \in X$ .

Покажем, что  $P(x+y) \leq P(x) + P(y) \forall x, y \in X$ . Если  $x = 0$  (или  $y = 0$ ) или  $x+y = 0$ , то всё очевидно.

Пусть  $x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0$ , тогда по определению  $P(x+y) = |x+y| P\left(\frac{x+y}{|x+y|}\right)$ , но  $x+y = (|x|+|y|) \left(\frac{x+y}{|x|+|y|}\right) = (|x|+|y|) \left(\frac{x}{|x|+|y|} + \frac{y}{|x|+|y|}\right)$ , где  $\frac{x}{|x|+|y|} \in B_0, \frac{y}{|x|+|y|} \in B_0, \frac{x+y}{|x|+|y|} \in B_0$  и в силу выпуклости  $P$  на  $B_0$  имеем, что  $P\left(\frac{x}{|x|+|y|} + \frac{y}{|x|+|y|}\right) \leq \frac{1}{|x|+|y|} (P(x) + P(y))$ , но

$$P(x+y) = (|x|+|y|) P\left(\frac{x+y}{|x|+|y|}\right) = (|x|+|y|) P\left(\frac{x}{|x|+|y|} + \frac{y}{|x|+|y|}\right) \leq$$

$$\leq (|x|+|y|) \frac{1}{(|x|+|y|)} (P(x) + P(y)) = P(x) + P(y).$$

Мы получили, что  $P$  — выпуклая на  $X$  функция. При этом  $\|P\|$  определяется на  $B_0$ , поэтому  $\|P\| \leq \frac{1}{r}$ , что было уже отмечено.

Покажем, что  $P$  — непрерывная на  $X$  функция. Пусть  $x_n \rightarrow x$ , проверим, что  $P(x_n) \rightarrow P(x)$ . Как известно, сходимость  $x_n \rightarrow x$  в  $X = R^n$  равносильна тому, что  $|x_n - x| \rightarrow 0$ .

Учитывая, что  $|x_n - x| \rightarrow 0$ , можно считать, что  $(x_n - x) \in B_0$ , а так как  $P$  на  $B_0$  является непрерывной функцией, то  $P(x_n - x) \rightarrow P(0) = 0$ . Поскольку  $P_n$  и  $P$  — числовые функции, то

$$P(x_n) \rightarrow P(x) \Leftrightarrow P(x_n) - P(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |P(x_n) - P(x)| \rightarrow 0.$$

Учитывая выпуклость функции  $P$ , имеем оценки:

$$P(x) = P(x - x_n + x_n) \leq P(x - x_n) + P(x_n) = P(x_n - x) + P(x_n);$$

$$P(x_n) = P(x_n - x + x) \leq P(x_n - x) + P(x),$$

откуда

$$P(x) - P(x_n) \leq P(x_n - x), P(x_n) - P(x) \leq P(x_n - x).$$

Из последних двух неравенств имеем  $|P(x_n) - P(x)| \leq P(x_n - x) \rightarrow 0$  и т.д.

Таким образом, мы показали, что  $P$  — неотрицательная, положительно однородная, выпуклая функция на  $X, P(-x) = P(x) \forall x \in X$  и  $\|P\| \leq \frac{1}{r} (\Leftrightarrow B = B(0, r) \subset U)$ , т.е. функция  $P$  является калибром множества  $U \in \Sigma$ , откуда  $P \in \Sigma_p$ .

Тем самым  $\Sigma_p$  — замкнутое множество, что вместе с относительной компактностью дает компактность  $\Sigma_p$ , а в силу изометрии  $\phi$  — и компактность  $\Sigma$ . Покажем, что  $\Sigma_p$  — выпуклое множество. Пусть  $P_1, P_2 \in \Sigma_p, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, P = \alpha P_1 + \beta P_2$ . Очевидно, что  $P$  — неотрицательная, непрерывная, положительно однородная функция,  $P(x) = P(-x) \forall x \in X$ .

Кроме того,  $P(x+y) = \alpha P_1(x+y) + \beta P_2(x+y) \leq \alpha P_1(x) + \alpha P_1(y) + \beta P_2(x) + \beta P_2(y) = (\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)) + (\alpha P_1(y) + \beta P_2(y)) = P(x) + P(y)$ , а  $\|P\| = \|\alpha P_1 + \beta P_2\| \leq \alpha \|P_1\| + \beta \|P_2\| \leq \alpha \cdot \frac{1}{r} + \beta \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ , откуда  $P \in \Sigma_p$ .

Тем самым  $\sum_p$ , а значит, и  $\Sigma$  — выпуклое компактное множество.

*Замечание 4.* Как известно, для звездных множеств  $U_1$  и  $U_2$  условие  $U_1 \subset U_2$  означает, что  $U_1 \geq U_2$ . Кроме того, в силу звездности  $U_1$  существует шар  $B = B(0, r) \subset U_1$ , а значит,  $B \subset U_2$ . Поэтому полученный в предложении результат представляет

*Теорема.* Пусть  $\Sigma$  — ограниченное сверху в  $S(X)$  множество звездных выпуклых 0 - симметричных множеств  $\Rightarrow \Sigma$  — выпуклое компактное множество.

#### Список литературы

- 1 Rubinov A.M., Jagubov A.A. The space of star-shaped sets and its applications in no smooth optimization. — Jaxenburg, Austria, 1984.
- 2 Александрян З.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высш. шк., 1979.

Т.Х.Макажанова

### Жұлдыздық жиындар кеңістігіндегі ықшамдылық шарты жайында

Мақалада ақырлы өлшемді евклидтік кеңістіктің  $S(X)$  жұлдызды жиындар кеңістігі реттелген нормаланған кеңістікте зерттелген. Дөнес жұлдызды жиындардан тұратын  $S(X)$  ішкі жиындарының ықшамдылық шарты алынды.

T.Kh.Makazhanova

### About the condition of the compactness in the space of star-shaped sets

In this paper was investigated the space  $S(X)$  star-shaped sets in the finite-dimensional. The properties of space is the space of star-shaped subsets of finite-dimensional Euclidean space, which is an ordered normed space. Here were obtained the conditions of the compactness in  $S(X)$  for subsets consisting of the convex star-shaped sets.

#### References

- 1 Rubinov A.M., Jagubov A.A. *The space of star-shaped sets and its applications in no smooth optimization*, Jaxenburg, Austria, 1984.
- 2 Aleksandryan R.A., Mirzaxanyan E.A. *General topology*, Moscow: Vysshaya shkola, 1979.