ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И ДРОБНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Омаров М.Т.[1], **Рамазанов М.И.**[2], **Танин А.О.**[3], **Копбалина С.С.**[4]

[1]Карагандинский университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
[1]E-mail: madiomarovt@gmail.com

Аннотация. Собраны установленные результаты о влиянии дробных интегралов и производных на фрактальные свойства классической функции Вейерштрасса. Показано, что коробчатая размерность графика снижается при интегрировании и повышается при дифференцировании, причём изменение носит линейный характер по порядку оператора. Рассмотрено также обобщение с дробными тригонометрическими функциями, где базовая размерность остаётся неизменной.

Функция

$$W_{\gamma,\lambda}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k\gamma} \sin\bigl(2\pi\lambda^k x\bigr), \qquad 0 < \gamma < 1,\ \lambda \geq 2,$$

является непрерывной, нигде не дифференцируемой и обладает локальным показателем Гёльдера γ. График этой функции имеет коробчатую размерность $2-\gamma$ [1].

Левый интеграл Римана–Лиувилля порядка $v \in (0,1)$ сглаживает кривую. Вычислено, что его применение приводит к выражению

$$\dim_B \Gamma\bigl(I^v W\bigr) = \gamma + 1 - v,$$

то есть размерность уменьшается на величину v относительно исходного значения, при условии $\gamma > 1 - v$ и достаточно большом λ [2].

Обратная картина наблюдается при действии левой производной Вейля–Маршо того же порядка v. Установлена линейная зависимость между v и фрактальными характеристиками: коробчатая размерность графика дробной производной возрастает, что отражает усиление шероховатости [3].

В альтернативном подходе, где в ряде W синусы заменяются на дробные тригонометрические функции, базовая размерность остаётся равной $2-\gamma$, однако дальнейшее дробное дифференцирование по Жумари также увеличивает шероховатость графика [4].

Подтверждённые данные показывают: классические дробные интегралы понижают, а дробные производные повышают коробчатую размерность функции Вейерштрасса, причём изменение линейно соотнесено с порядком оператора. Обобщение с дробными тригонометрическими функциями сохраняет исходную размерность, но не отменяет эффекта повышения шероховатости при дифференцировании. Данные результаты подчеркивают потенциал дробного анализа как регулируемого инструмента моделирования фрактальных сигналов.

Список литературы

[1] Zähle M., Ziezold H. *Fractional derivatives of Weierstrass-type functions.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 1996. V. 76. P. 265–275.

[2] Zhou S. P., Yao K., Su W. Y. *Fractional integrals of the Weierstrass functions: the exact box dimension.* Analysis in Theory and Applications. 2004. V. 20. P. 332–341.

[3] Yao K., Su W. Y., Zhou S. P. *The fractional derivatives of a fractal function.* Acta Mathematica Sinica. English Series. 2006. V. 22. P. 719–722.

[4] Ghosh U., Sarkar S., Das S. *Fractional Weierstrass function by application of Jumarie fractional trigonometric functions and its analysis.* arXiv:1508.06862. 2015.

ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУІ

Орумбаева Нургул Тумарбековна[1], **Манат Алуа Манатқызы**[2]

[1,2]Академик Е.А. Бөкетов атындағы ҚарУ, Қарағанды қаласы, Қазақстан Республикасы
[1]E-mail: orumbayevanurgul@gmail.com
[2]E-mail: aluamanat5@gmail.com

Бұл жұмыста ф.-м.ғ. д., профессор Д.С. Джумабаев ұсынған [1] параметрлеу әдісі арқылы үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептердің шешімділігі және жинақтылық шарттары алынды. Параметрлеу әдісі бойынша қарастырылып отырған интервал шағын бөліктерге бөлінеді. Әрбір бөлікте бастапқы мәндерге тәуелді шешімдер есептеледі, ал шеттік шарттар параметрлер арқылы сипатталады. Нәтижесінде бастапқы есеп пара-пар параметрлік есепке айналады, бұл шешімді табуды жеңілдетеді.

Зерттеу жұмысы [2-3] жұмыстардың негізінде жүргізілді. [2-3] жұмыстарда параметрлеу әдісінің көмегімен Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулері үшін бейлокал шеттік есептің жуық шешімін табу алгоритмі құрастырылды. Ұсынылған алгоритмінің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары алынды. Сонымен бірге, сызықтық емес теңдеуге арналған бейлокал шеттік есептің оқшауланған шешімі бар болатын облыс құрылды. Дәл және жуық шешімі арасындағы бағалаулар алынды.

$\Omega = [0, X] \times [0, T]$ облысында үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right), (x,t) \in \Omega, \ \ u \in R, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \ \ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \ \ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$b_1(x)\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + b_2(x)\frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x^2} + b_3(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b_4(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} + \\ + b_5(x)u(x,0) + b_6(x)u(x,T) = \theta(x), \ \ x \in [0,X], \tag{4}$$

мұндағы $f : \Omega \times R \times R \times R \to R$ үзіліссіз, $\theta(x), b_j(x), j = \overline{1,6}$ функциялары $[0,X]$ аралығында үзіліссіз, $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары $[0,T]$ аралығында үзіліссіз.