

А.Н.Есбаев, А.К.Жанболова, С.Н.Петерс

Әлсіз жүктелген параболалық теңдеу үшін берілген бірінші шеттік есеп туралы

Мақалада жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін өзара түйіндес есептер қарастырылған, мұндағы жүктелген қосылғыш белгісіз функцияның орнықтырылған нүктедегі бірінші ретті туындысы болып табылады. Қарапайым жүктелмеген теңдеулерге қолданылатын зерттеу әдістерін жүктелген теңдеулерге әр уақытта қолданыла бермейтіндігі белгілі. Осындай жүктеулі теңдеулерге тиімді басқару есептері, алдын ала болжау және жер ылғалдылығының деңгейін реттеу есептері келтірілді. Сонымен қоса жүктелген теңдеулер интегралдық және дифференциалдық теңдеулерін сандық есептеуде пайда болды.

A.N.Esbayev, A.K.Zhanbolova, S.N.Peters

About the first regional task for poorly — the loaded parabolic equation

In work mutually conjugate tasks for the loaded equation of heat conductivity where the loaded composed represents a derivative of the first order from unknown function in the fixed point are considered. It is known that not always it is possible to apply methods of research of the usual not loaded equations to the loaded equations. To this sort of loaded equations problems of optimum control, early forecasting and regulation of level of soil moisture are reduced. Also loaded equations arise at the numerical solution of the integrated and differential equations.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Қарағандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: modth1705@mail.ru) **Δ -йонсоновские теории**

В статье исследованы теоретико-модельные свойства нового класса теорий. В этом классе проведена работа по описанию счетно-категоричных и несчетно-категоричных теорий при соответствующих дополнительных условиях. Рассматриваемый класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в том смысле, что вместо продолжений рассматриваются погружения.

Ключевые слова: язык первого порядка, позитивно аксиоматизируемая теория, йонсоновская теория, категоричный модельный компаньон.

Категоричные Δ -йонсоновские теории. Теперь мы хотим определить понятие Δ -йонсоновских теорий (Δ - J). В том случае, если при некотором фиксированном Δ , в определении рассматриваемой Δ - PJ теории [1] заменить все Δ -продолжения на Δ -погружения, то мы получим определение Δ -йонсоновских теорий (Δ - J). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличие от (Δ - PJ) теорий, которые могут быть вообще говоря и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов (\forall и \exists) к $B^+(At)$. На-

зовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+ . Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$ мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$ -аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий, касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле), считаются известными и их можно извлечь, например, в [1].

Следующий результат можно найти в работе Д.Сараццо [2]:

Теорема 1. Если L — счетный язык и T — полная ω -категоричная теория, то T имеет ω -категоричный модельный компаньон.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой.

Следующее определение принадлежит А.Макинтайру [3].

Теория T позитивно модельно полна, если T модельно полна и каждая экзистенциальная L -формула эквивалентна в T некоторой позитивно экзистенциальной L -формуле.

Модель $A \in ModT$ называется простой (simple) в $ModT$, если каждый нетривиальный морфизм из A в B , где $B \in ModT$, является инъективным.

Из работы В.Вайспфенинга [4] можно извлечь следующий результат:

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

- i) T позитивно модельно полна;
- ii) T модельно полна и каждая T -модель является простейшей в $ModT$.

Легко заметить, что позитивная робинсоновская теория в смысле [5, 6] является обобщением понятия оболочки Кайзера T^0 для йонсоновской теории T . В случае когда $\Delta = B(At)$ и Δ - J теория совершенна, следует, что понятия семантической модели для позитивной йонсоновской теории и универсальной области из [5, 6] совпадают. С помощью этого замечания мы хотим доказать результат, описывающий счетно категоричные Δ -йонсоновские теории.

Теорема 3. Пусть T — Δ - J -теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) теория T^* ω -категорична,
- 2) теория T ω -категорична.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2).

1) Пусть $T^* = Th(C)$ ω -категорична, где C — T -универсальная T -однородная модель теории T . Она существует в силу того, что T , в частности, является йонсоновской теорией. Так как T^* полная, то в силу теоремы 1, T^* имеет ω -категоричный модельный компаньон T^* . В силу модельной совместности T и T^* , T^* и T^* , и так как отношение может быть модельно совместным транзитивно, мы имеем, что T^* модельно совместна с T . Из этого следует, что T^* является модельным компаньоном T . По теореме Робинсона о единственности модельного компаньона, следует, что $T^* = T^*$. Следовательно, T^* модельно полна и, следовательно, теория T совершенна. Тогда, в силу критерия о совершенности йонсоновских теорий, получим, что $E_T = ModT^*$. Отсюда, так как T^* ω — категорична по условию, следует, что в E_T — всего одна счетная модель с точностью до изоморфизма. Обозначим эту модель через D . Пусть A — счетная неэкзистенциально замкнутая произвольная модель теории T не изоморфная D . Тогда, в силу индуктивности теории, модель A Δ продолжается в некоторую B , где $B \in (E_T)^+$. Так как рассматриваемая теория является йонсоновской, мы имеем, что $(E_T)^+ \supseteq E_T$. Покажем обратное включение. Из того, что T^* модельно полна в силу совершенности и так как $E_T = ModT^*$, следует, что любая модель теории T^* является простейшей, тогда T^* позитивно модельно полна. Тогда, по определению, любая \exists -формула эквивалентна некоторой позитивной

\exists -формуле. Следовательно, $(E_T)^+ \subseteq E_T$. Таким образом, $(E_T)^+ = E_T$. Тогда и в $(E_T)^+$ только одна счетная модель с точностью до изоморфизма, т.е. $B \cong D$. Тогда в B содержится Δ -начало изоморфное A , что противоречит предположению о том, что A не изоморфно D . Таким образом, T ω -категорична.

2) \Rightarrow 1). Пусть T ω -категорична. Предположим противное, т.е. в $ModT^*$ существуют две счетные неизоморфные модели. Обозначим их A и B . Так как $T \subseteq T^*$, то $ModT^* \subseteq ModT$, а следовательно, так как A и B из $ModT^*$, то получаем противоречие с ω -категоричностью T .

Далее мы рассмотрим несчетно категоричные Δ - J -теории, дадим следующие определения из работы [7].

Формула $\varphi(\bar{x})$ называется Δ^+ -формулой относительно теории T , если существуют позитивно экзистенциальные формулы $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Мы будем говорить, что теория T допускает R_1^+ , если для любой позитивно экзистенциальной формулы $\varphi(\bar{x})$, совместной с T , существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$, совместная с T , такая что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Счетная модель теории T называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё Δ -погружаются все счетные модели данной теории.

Модель A является Δ -алгебраически простой моделью теории T , если A является моделью теории T и A может быть Δ -погружена в каждую модель теории T .

Δ - J -теория называется универсальной, если её аксиомы позитивно-универсальны.

Следующие результаты содержатся в [7].

Теорема 4. Пусть T — универсальная теория, полная для экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ) -атомная.

Теорема 5. Пусть T — $\forall\exists$ -теория, полная для экзистенциальных предложений, допускающая R_1 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T имеет алгебраически простую модель;
- 2) T имеет (Σ, Δ) -атомную модель;
- 3) T имеет (Δ, Σ) -атомную модель;
- 4) T имеет Δ -nice алгебраически простую модель;
- 5) T имеет единственную алгебраически простую модель,

где условие R_1 следующее: если для любой экзистенциальной формулы $\varphi(\bar{x})$, совместной с T , существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta$ совместная с T , такая что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$, а формула $\varphi(\bar{x})$ называется Δ -формулой относительно теории T , если существуют экзистенциальные формулы $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Как следствие можно получить следующие результаты относительно Δ - J -теории.

Теорема 6. Пусть T — универсальная Δ - J -теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет Δ -алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ^+) -атомная.

Теорема 7. Пусть T — Δ - J -теория, полная для позитивно экзистенциальных предложений, допускающая R_1 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) T имеет Δ -алгебраически простую модель;
- 2) T имеет (Σ, Δ^+) -атомную модель;
- 3) T имеет единственную Δ -алгебраически простую модель.

Пусть $A, B \in (E_T)^+$ и $A \subsetneq B$. Тогда B называется Δ -алгебраически простым модельным расширением A в $(E_T)^+$, если для любой модели $C \in (E_T)^+$ из того, что A Δ -погружается в C , следует, что B Δ -погружается в C .

Следующий классический результат Морли из [8] описывает ω_1 -категоричные теории на языке простых расширений.

Теорема 8. Полная теория T ω_1 -категорична тогда и только тогда, когда любая её счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

Следующий результат является обобщением этой теоремы.

Теорема 9. Пусть T — универсальная Δ - J -теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений, для которой выполняется R_1^+ и $\Delta = B(At)$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T^* ω_1 -категорична;
- 2) любая счетная модель из $(E_T)^+$ имеет Δ -алгебраически простое модельное расширение в $(E_T)^+$.

Доказательство

1) \Rightarrow 2) Если T^* ω_1 -категорична, то она совершенна в силу теоремы Морли о несчетной категоричности. Тогда в силу критерия совершенности йонсоновской теории мы имеем, что теория T^* модельно полна и $ModT^* = E_T$. В этом случае следует, что $E_T = (E_T)^+$. Если теория T^* модельно полна, то любое Δ -погружение является изоморфным вложением, а в силу модельной полноты T^* элементарным. Так как T^* — полная теория, то, применяя к ней указанную выше теорему 8, получаем требуемое.

2) \Rightarrow 1) Обращаясь к семантической модели C теории T (она существует, так как T — йонсоновская теория), получим, что модель C ω -универсальна. Её мощность, вообще говоря, больше, чем счетная. Поэтому рассмотрим её счетную элементарную подмодель D . В силу того, что C экзистенциально замкнута, её элементарная подмодель D тоже экзистенциально замкнута. Отсюда имеем, что она счетно-алгебраически универсальна. Теперь остается применить теорему 8, согласно которой теория T имеет Δ -алгебраически простую модель A_0 . Определим по индукции $A_{\delta+1}$, которая будет Δ -алгебраически простым модельным расширением модели A_δ и $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Тогда пусть $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. Предположим, что $B \models T$ и $cardB = \omega_1$. Для того чтобы показать, что $B \approx A$, разложим B в цепь $\{B_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ счетных моделей. В силу йонсоновости теории T это возможно. Определим функцию $g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ и цепь $\{f_\delta^y : A_{g_\delta} \rightarrow B_\delta \mid 0 < \delta < \omega_1\}$ Δ -погружений индукцией по δ :

1. $g0 = 0$ и $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$.
2. $g\lambda = \cup\{g\delta \mid \delta < \lambda\}$ и $f_\lambda = \cup\{f_\delta^y \mid \delta < \lambda\}$.
3. $f_{\delta+1}$ равна объединению цепи $\{f_\delta^y \mid y < \rho\}$, которая определяется индукцией по y .

$$4. f_{\delta+1}^0 = f_\delta, f_{\delta+1}^\lambda = \cup\{f_{\delta+1}^y \mid y < \lambda\}.$$

5. Предположим, что $f_1^y : A_{g_{\delta+y}} \rightarrow B_{\delta+1}$. Если $f_{\delta+1}^y$ — отображение на, то $\rho = y$. В противном случае в силу Δ -алгебраической простоты $A_{g_{\delta+y+1}}$ можно продолжить $f_{\delta+1}^y$ до $f_{\delta+1}^{y+1} : A_{g_{\delta+y+1}} \rightarrow B_{\delta+1}$.

$$6. g(\delta+1) = g\delta + \rho.$$

Ясно, что $f = \cup\{f_\delta^y \mid \delta < \omega_1\}$ отображает (Δ -погружает) A в B . Так как B — произвольная модель теории T , а A — единственная Δ -алгебраически простая и позитивно экзистенциально замкнутая модель в силу условия и построения, то отсюда следует, что $(E_T)^+$ в несчетной мощности имеет единственную модель, значит семантическая модель теории T насыщена, т.е. йонсоновская теория T совершенна. Отсюда следует, что $ModT^* = (E_T)^+$. Следовательно, T^* ω_1 -категорична.

References

- 1 Yeshkeyev A.R. Jonsson theory: Manual. — Karaganda: Publishing House of the KSU, 2009. — 250 p.
- 2 Saracino D. Model companion for ω -categorical theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — № 39. — P. 591–598.
- 3 Macintyre A. Model-completeness for sheaves of structures // Fundamenta mathematicae. — 1973. — Vol. 81. — P. 73–89.

- 4 Weispfenning V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — Dec. 1981. — Vol. 46. — № 4. — P. 843–849.
- 5 Ben-Yaacov I. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — № 1. — P. 85–118.
- 6 Ben-Yaacov I. Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.
- 7 Baldwin J.T., Kueker D.W. Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. — 1981. — 20. — P. 289–330.
- 8 Gerald E. Sacks. Saturated models Theory. — Moscow: Mir, 1976. — 192 p.

А.Р.Ешкеев

Δ -йонсондық теориялар

Мақалада теориялардың бір жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылды. Сол класта кейбір қосымша берілген шарттар бойынша сол теориялардың категориялық сұрақтары зерттелді. Олардың ω -категориялық және ω_1 -категориялық жағдайлары кейбір қосымша берілген шарттар арқылы көрсетілген. Қарастырылған класта жалғасулардың орнына батулармен жұмыс жасалды. Бұл теориялар йонсон теориялардың позитивті жалпыламасы болып табылады.

A.R.Eshkeev

Δ -jonsson's theories

In this article we considered some new class of theories and we have been considered model-theoretical properties of such theories. In particular with concerned such theories under some additional properties it was described ω -categorical and ω_1 -categorical cases. In this class of theories instead of continuations we considered particular case of embeddings-immersions. And this class of theories is became positive generalization of jonsson's theories.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев¹, Р.М.Оспанов², О.И.Ульбрихт¹

¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

²Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева (E-mail modth1705@mail.ru)

Решетки экзистенциальных формул Δ -йонсоновской теории

В статье рассмотрены теоретико-модельные свойства нового класса теорий Δ -йонсоновских теорий. Были исследованы свойства решеток формул этих теорий и их связь с известными вопросами в теории моделей. В частности, исследованы свойства совершенности таких теорий и их связь, связанные с вопросами алгебры Линденбаума-Тарского.

Ключевые слова: йонсоновские теории, булева алгебра, модельный компаньон, экзистенциальная формула, бескванторное дополнение.

Введение

Выделим два направления в развитии теории моделей. В [1] их называют западной и восточной теорией моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка.