УДК 517.51

С.Т.Махашев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Жалпыланған Хаар жүйесі бойынша Фурье қатарларының бірқалыпты жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары қарастырылған.

The necessary and sufficient conditions uniform convergence of a series from coefficients of Fourier on tempered system are researched by generalized system Haar.

Через $L_q\left[0,1\right]$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу на [0,1] функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_q=\left\{\int_0^1\left|f(x)\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}<+\infty,\ 1\le q<+\infty .$$

Пусть дана последовательность $\left\{p_n\right\}$ натуральных чисел таких, что $p_n\ge 2$, $n=1,2,...$. Определим на отрезке [0,1] обобщенную систему Хаара (см. [1]).

Положим $\chi_1(t)\equiv 1$ на [0,1]. Если же $k\ge 2$, то $k=m_n+r(p_{n+1}-1)+s$, где $m_n=p_1p_2...p_n$, $n=0,1,2,...$, $r=0,1,2,...,m_n-1$, $s=1,2,...,p_{n+1}-1$, причем такое представление числа k единственно. Обозначим через A множество точек вида $\dfrac{i}{m_n}$ на отрезке [0,1]. Если $t\in[0,1]\setminus A\equiv B$, то разложение

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(t)}{m_n},\ \alpha_n(t)=0,1,...,p_n-1$$

единственно. Теперь определим функцию $\chi_k(t)\equiv\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ следующим образом:

$$\chi_{n,r}^{(s)}(t)=\begin{cases}\sqrt{m_n}\exp 2\pi is\dfrac{\alpha_{n+1}(t)}{p_{n+1}},t\in\left(\dfrac{r}{m_n},\dfrac{r+1}{m_n}\right)\bigcap B;\\ 0,\ при\quad t\notin\left[\dfrac{r}{m_n},\dfrac{r+1}{m_n}\right]\end{cases}$$

$(n=0,1,2,...,r=0,1,2,...,m_n-1,s=1,2,...,p_{n+1}-1)$. На множестве B функция $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ является ступенчатой. Воспользуемся тем, что множество B всюду плотно на [0,1], и продолжим функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ по непрерывности на интервале $\left(\dfrac{r}{m_n},\dfrac{r+1}{m_n}\right)$. После этого в точках разрыва функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0,1] — ее предельным значениям изнутри отрезка. Таким образом, система $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ полностью определена. Если $p_n=2$, $n=1,2,...$, то система $\chi\left\{p_n\right\}$ будет классической системой Хаара (см. [1]).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $a_n(f)=\int_0^1 f(x)\overline{\chi_n}(x)dx$ — коэффициенты Фурье по обобщенной системе Хаара. Величина $\omega(f,\delta)_{L_q}=\sup\limits_{0\le h\le\delta}\left\{\int_0^{1-h}\left|f(x+h)-f(x)\right|^q dx\right\}^{1/q}$ называется модулем непрерывности функции $f\in L_q\left[0,1\right]$.

Рассмотрим функциональный класс

$$H_q^{\omega}=\left\{f\in L_q\left[0,1\right]:\omega\left(f,\delta\right)_{L_q}\le\omega\left(\delta\right),\delta\in\left[0,1\right]\right\},$$

где $\omega\left(\delta\right)$ — заданный модуль непрерывности $1\le q<+\infty$.

Условие абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье-Хаара в терминах модуля непрерывности и наилучшего приближения исследовано в [2, 3], для обобщенной системы Хаара изучено в [4–6].

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье по обобщенной системе Хаара $\chi\{p_n\}$ функции из класса H_q^{ω}.

Лемма 1 (см. [4]). Пусть $X(\phi)$ — максимальное симметричное пространство, $0<\underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X <1$. Тогда для любой функции $f\in X(\phi)$ выполняется неравенство

$$\left|a_n(f)\right| \le \frac{C}{\sqrt{m_\nu}\cdot\phi\left(m_{\nu+1}^{-1}\right)}\omega\left(f,m_{\nu+1}^{-1}\right)_X\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{\nu+1}}}$$

при $n=m_\nu+r\left(p_{\nu+1}-1\right)+s,\ r=0,1,\dots,m_\nu-1;\ s=1,2,\dots,p_{\nu+1}-1$.

Теорема 1. Пусть обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$ определена ограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Если $f\in L_q[0,1]$, $1\le q<+\infty$, $\beta\le\theta\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$, $\theta>0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^\theta\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_q}<+\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n(f)\chi_n(t)\right|^\theta \tag{2}$$

равномерно сходится на $[0,1]$.

Доказательство. Так как $\{p_n\}$ — ограниченная последовательность, то условие (1) эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}}\omega^\theta\left(f,m_n^{-1}\right)_{L_q}<+\infty. \tag{3}$$

Пусть l, j — произвольные натуральные числа. Для этих чисел существуют натуральные числа s и r такие, что $m_s<l\le m_{s+1}$, $m_r<j\le m_{r+1}$.

Тогда

$$\sum_{m=l+1}^{j} m^{\beta}\left|a_m(f)\cdot\chi_m(t)\right|^\theta \le \sum_{n=s}^{r}\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\nu^\beta\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta \tag{4}$$

для любого $t\in[0,1]$.

Для любого числа $t\in[0,1]$ могут быть отличны от нуля не более чем p_n функции из $\chi_{m_n+1}(t),\dots,\chi_{m_{n+1}}(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,\dots$ Тогда, пользуясь леммой 1 при $X(\phi)=L_q,\phi(t)=t^{1/q}$ и оценкой

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C \qquad \forall n=0,1,\dots,$$

получим

$$\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta\cdot\nu^\beta \succ\prec m_n^\beta\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta = m_n^\beta\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\left|a_{n,r}^{(s)}(f)\cdot\chi_{n,r}^{(s)}(t)\right|^\theta =$$

$$= m_n^\beta\sum_{s_j<p_{n+1}}\left|a_{n,r}^{(s_j)}(f)\cdot\chi_{n,r}^{(s_j)}(t)\right|^\theta = m_n^\beta\cdot\left(\sqrt{m_n}\right)^\theta\sum_{s_j<p_{n+1}}\left|a_{n,r}^{(s_j)}(f)\right|^\theta \le$$

$$\le C\cdot m_n^{\beta+\frac{\theta}{2}}\cdot m_{n+1}^{\frac{\theta}{q}-\frac{\theta}{2}}\cdot\omega^\theta\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}\cdot\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C\cdot m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\omega^\theta\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=l+1}^{j}\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta\cdot\nu^\beta\le C\cdot\sum_{n=s}^{r}m_n^{\beta+\frac{\theta}{q}}\omega^\theta\left(f,\frac{1}{m_{n+1}}\right)_{L_q}$$

для любого $t\in[0,1]$.

В силу (3) отсюда $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in N$

$$\sum_{\nu=l+1}^{j}\nu^\beta\left|a_\nu(f)\cdot\chi_\nu(t)\right|^\theta<\varepsilon\quad\forall j>n_\varepsilon,\ \forall t\in[0,1].$$

Следовательно, ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема показывает неулучшаемость условий (1) на классах H_q^ω.

Теорема 2. Пусть дан модуль непрерывности $\omega(\delta),\ \delta\in[0,1]$ и $1\le q<+\infty$, $0<\theta<+\infty,\ \beta<\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)$. Тогда, для того чтобы для любой функции $f\in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходился на $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^\theta\left(\frac{1}{n}\right)<+\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть $\forall f\in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$, допустим условие (5) не выполняется, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^\theta\left(\frac{1}{n}\right)=+\infty. \tag{6}$$

Тогда (см. [7]) можно построить числовую последовательность $\{B(n)\}$, обладающую следующими свойствами:

1. $B(n)\downarrow 0$ при $n\to+\infty$; $B(n)\le\omega\left(n^{-1}\right),\ n=1,2,...$
2. $\sum_{k=1}^{n}B(k)=\underline{\underline{O}}\left(n\omega\left(n^{-1}\right)\right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}B^\theta(n)=+\infty$.

Учитывая, что $B(n)\downarrow 0,\ n\to+\infty$ и $\{p_n\}$ — ограниченная последовательность, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k^{\beta+\frac{\theta}{q}}B^\theta(m_k)=+\infty. \tag{7}$$

Теперь построим возрастающую последовательность номеров n_j такую, что

$$\sum_{j=k}^{\infty}B\left(m_{n_j}\right)=\underline{\underline{O}}\left(B\left(m_{n_k}\right)\right); \tag{8}$$

$$\sum_{j+1}^{\infty}m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot B^\theta\left(m_{n_j}\right)=+\infty. \tag{9}$$

Для этого положим $k_0=0,\ k_1=1$ и $k_{i+1}=\min\left\{k:B(m_k)\le\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right)\right\}$.

Тогда

$$B\left(m_{k_{i+1}}\right)\le\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right); \tag{10}$$

$$B(m_k)>\frac{1}{2}B\left(m_{k_i}\right),\ k=k_i,k_i+1,...,k_{i+1}-1. \tag{11}$$

Так как $B(m)\downarrow$, то из (7) следует, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} m_{k_i-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_i-1}\right)=+\infty .$$

Следовательно, по крайней мере один из рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j+1}-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_{2j+1}-1}\right),\ \sum_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j}-1}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{k_{2j}-1}\right)$$

расходится.

Если расходится первый из этих рядов, то положим $n_j=k_{2j+1}-1$, а в противном случае полагаем $n_j=k_{2j}-1$. Тогда ясно, что (9) выполняется. Далее из (10) следует $B\left(m_{n_{j+1}}\right)\le\frac{1}{2}B\left(m_{n_j}\right)$. Из этого неравенства следует (8). Положим

$$A_k=\sum_{j=1}^{k} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}} B^{\theta}\left(m_{n_j}\right);$$

$$D_k=\sum_{j=1}^{k} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}} \frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j};$$

$$F_k=m_{n_k}^{\frac{1}{q}}\cdot\frac{B\left(m_{n_k}\right)}{A_k\cdot D_k},\ k=1,2,...$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(t)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{j+1}\cdot 2p_{n_j+1}}{p_{n_j+1}-1}\cdot F_j, \text{ при } t=\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}},\ j=1,2,...\\ 0, \text{ при } t=0,\ t\in\left[\dfrac{1}{p_1},1\right],\ t\in\left[\dfrac{1}{m_{k+1}},\dfrac{1}{m_k}\right],\ k\ne n_j\\ \text{линейна на каждом из отрезков } \left[\dfrac{1}{m_{n_j+1}},\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}\right],\left[\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}},\dfrac{1}{m_{n_j}}\right].\end{cases}$$

В [6] доказано, что $f_0\in L_q[0,1]$ и $f_0\in H_q^{\omega}$, $1\le q<+\infty$. Кроме этого, также доказано

$$\left|a_{m_{n_j}+1}(f_0)\cdot\chi_{m_{n_j}+1}(0)\right|\ge C_q\cdot F_j,\ j=1,2,... .$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n(f_0)\cdot\chi_n(0)\right|^{\theta}\ge\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta}\left|a_{m_{n_j}+1}(f_0)\cdot\chi_{m_{n_j}+1}\right|^{\theta}\ge C_{q,\theta}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta}\cdot F_j^{\theta}=C_{q,\theta}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j\cdot D_j}. \quad (12)$$

В силу соотношения (9) и теоремы Абеля (см. [8]) ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{\beta+\frac{\theta}{q}}\cdot\frac{B^{\theta}\left(m_{n_j}\right)}{A_j\cdot D_j}$$

расходится. Следовательно, из (12) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left|a_n(f_0)\cdot\chi_n(0)\right|^{\theta}=+\infty .$$

Это противоречит тому, что $\forall f\in H_q^{\omega}$ ряд (2) сходится равномерно на $[0,1]$.

Замечание. Так как $\omega(f,\delta)_{L_q}\ge C\cdot\delta$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\omega^{\theta}(f,\frac{1}{n})_{L_q}\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}(\frac{1}{n})^{\theta}=C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\theta+1-\beta-\theta/q}}.$$

Ряд в правой части при $\beta \geq \theta\left(1-\frac{1}{q}\right)$ расходится. Тогда условие (1) будет выполняться только для постоянных функций, следовательно, ряд (2) равномерно сходится.

Список литературы

1. *Голубов Б.И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9. — С. 297–314.
2. *Ульянов П.Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. — 1967. — Т. 72. — С. 193–225.
3. *Ciesielski Z., Musielak J.* On absolute convergence of Haar series // Colloq. math. — 1959. — Vol. 7. — P. 61–65.
4. *Акишев Г.* О сходимости рядов по обобщенной системе Хаара // Математический журн. — 2002. — Т. 2. — № 3.
5. *Голубов Б.И., Рубинштейн А.И.* Об одном классе систем сходимости // Мат. сб. — 1966. — Т. 71. — С. 93–112.
6. *Акишев Г.А., Махашев С.Т.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара // Изв. вузов, матем. — 2000. — № 3. — С. 16–25.
7. *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. — 1970. — Т. 81. — С. 104–131.
8. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М., 1978. — С. 147.

УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылған. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттелініп отырған есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары тағайындалған.

The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem's solution for system of hyperbolic equations is offered. The sufficient conditions of algorithm's convergence and unique solvability of investigating problem are established.

Пусть $C(\overline{\Omega}, R^n)$ — пространство функций $u:\overline{\Omega} \to R^n$, непрерывных на $\overline{\Omega}$, с нормой $\|u(x,t)\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|u(x,t)\|$. Для функций $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ при фиксированном $x \in [0,\omega]$ введем норму

$$\|u(x,\cdot)\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|.$$

Постановка задачи. Пусть $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ и имеет частные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$; $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$. В области $\overline{\Omega} = [0,\omega]\times[0,T]$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \quad u \in R^n, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t) = u(\omega,t), \quad t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $f:\overline{\Omega}\times R^n\times R^n \to R^n$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и