УДК 517.95

Б.Е.Кангужин[1], А.А.Анияров[2], Г.Е.Берикханова[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;
[2]Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Мақалада дөңгелектегі Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебінің ақырлы өлшемді ауытқулары құрылған және олар корректілі шешілімді екендігі көрсетілген. Оператордың кеңеюі теориясының көмегімен шектелген облыста шекаралық есептің шешілімдігі зерттелген.

In this work for the Poisson equation in the circle we have constructed finite-dimensional perturbation of the Dirichlet problem, which at this correctly solved. With using the theory of operator extensions in this work we study the solvability of boundary problems in a limited area.

В работе В.А.Садовничего и В.А.Любишкина [1] исследованы спектральные свойства конечномерных возмущений уравнений с частными производными. Б.С.Павлов [2] исследовал уравнения с частными производными во всем пространстве. В дальнейшем нам понадобится известное утверждение.

Теорема 1 [3]**.** *Решение задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге* $\Delta W(x,y)=f(x,y)$, $\quad x^2+y^2<r^2$ *задается формулой*

$$W(x,y)=\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2} G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

с граничным условием

$$W\big|_{x^2+y^2=r^2}=0,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-d\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right],$$

d *— некоторая константа, конкретный вид которой не играет роли.*

Обсуждение теоремы 1. Теорема 1 утверждает, что функция Грина задачи Дирихле для круга выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G(x,y,\xi,\eta)$ принимает только отрицательные значения при любых (x,y) и (ξ,η), поскольку задаче Дирихле для гармонического уравнения соответствует отрицательно определенный оператор. Функция $G(x,y,\xi,\eta)$ на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$G(x,y,\xi,\eta)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0. \tag{1}$$

Пусть $h(x,y)$ — произвольная, дважды дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию по формуле

$$I(x,y)=\iint\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\,\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа по переменным ξ,η.

Ясно, что функция $I(x,y)$ обладает свойствами:

$$\Delta_{x,y}I(x,y)=\Delta_{x,y}h(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

$$I(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3}$$

С другой стороны, вспоминая формулу Грина $\iint\limits_{\Omega}\Delta u v\,dxdy=\iint\limits_{\Omega}u\Delta v\,dxdy-\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial \bar n}-\dfrac{\partial u}{\partial \bar n}v\right)ds$, функцию $I(x,y)$ можно переписать в виде:

$$I(x,y)=\iint_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\iint_{\Omega}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left(G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial h}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}\,, \tag{4}$$

где $\bar{n}_{\xi,\eta}$ — внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке (ξ,η). Заметим, что $G(x,y,\xi,\eta)=0$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$, поскольку $G(x,y,\xi,\eta)=G(\xi,\eta,x,y)$ и верно (1). Точно так же, в силу симметрии функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ относительно пар (x,y) и (ξ,η) имеем равенство

$$\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)=\delta_{\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \tag{5}$$

где $\delta_{\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ — дельта-функция Дирака в области Ω.

Из (4) и (5) следует равенство

$$I(x,y)=h(x,y)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,ds_{\xi,\eta}\,. \tag{6}$$

Удобно вести обозначение $M(x,y)=h(x,y)-I(x,y)$. Подставим правую часть (6) в соотношение (5). В результате для любой гладкой функции $h(x,y)$ получим соотношение

$$\Delta_{x,y}M(x,y)=0\,. \tag{7}$$

Теперь используем граничное условие (3). Подставим (6) в граничное условие (3), тогда для произвольной гладкой функции $h(x,y)$ имеем граничное соотношение

$$h|_{\partial\Omega}-M|_{\partial\Omega}=0\,. \tag{8}$$

В силу произвольности $h(x,y)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ из соотношения (8) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции Грина:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \tag{9}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ — дельта-функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничное соотношение (9) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известно, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения

Теорема 2. *Функция Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге обладает свойствами:*

1) $G(P,Q)=G(Q,P), \quad \forall Q,P\in\Omega,$
2) $G(P,Q)\le 0, \quad \forall Q,P\in\Omega,$
3) $\Delta_{x,y}G(Q,P)=\delta_{\Omega}(P,Q), \quad \forall Q,P\in\Omega,$
4) $G(P,Q)=0, \quad P\in\partial\Omega, \quad Q\in\Omega,$
5) *при* $P,Q\in\partial\Omega$ *справедливо соотношение* (9).

Теперь данную задачу рассмотрим в следующей области. Пусть $\Omega_0=\Omega\setminus\{M_0\}$ — область проколотого круга, где M_0 — некоторая внутренняя точка круга Ω. Возьмем произвольную функцию $h(x,y)$ из пространства $W_2^2(\Omega_0)$ и введем функцию по формуле

$$I(x,y)=\lim_{\delta\to+0}\int_{\Omega_\delta}G(x,y,\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\,,$$

где $\Omega_\delta=\Omega\setminus\Pi_\delta(M_0)$; $\Pi_\delta(M_0)=\{(\xi,\eta):\ x_0-\delta\le\xi\le x_0+\delta,\ y_0-\delta\le\eta\le y_0+\delta\}$, (x_0,y_0) — координаты точки M_0.

Преобразуем функцию $I(x,y)$ аналогично формулам (2)–(6), в результате имеем

$$I(x,y)=h(x,y)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)ds_{\xi,\eta}- \tag{10}$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}$$

при $(x,y)\neq M_0$. Предполагаем также, что относительно $h(\xi,\eta)$ в окрестности точки (x_0,y_0) выполнены условия:

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{y_0-\delta<\eta<y_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|h(x_0+\delta,\eta)\right|+\left|h(x_0-\delta,\eta)\right|\right)\right\}\leq C \tag{11}$$

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{x_0-\delta<\xi<x_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|h(\xi,y_0-\delta)\right|+\left|h(\xi,y_0+\delta)\right|\right)\right\}\leq C \tag{12}$$

и существуют пределы

$$\alpha=-\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\};$$

$$\beta=-\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;$$

$$\gamma=-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0-\delta)-h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi.$$

Тогда выпишем предел.

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0+\delta,\eta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta+$$

$$+G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,\xi,y_0+\delta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}d\xi+$$

$$+G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0+\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0-\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi}\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0-\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-\dfrac{\partial G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0+\delta)d\xi+$$

$$+\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \eta}\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0-\delta)-h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi.$$

Поскольку по предположению для функции $h(\xi,\eta)$ существует $\delta_0>0$ и $C>0$ такие, что выполняются соотношения (11), (12), то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}=$$

$$=\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta},$$

где числа α,β,γ были определены выше. Здесь учтено, что функция $G(x,y,\xi,\eta)$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ является достаточно гладкой функцией. Тогда получим

$$I(x,y)=h(x,y)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)ds_{\xi,\eta}+$$

$$+\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}.$$

Отсюда

$$h(x,y)-I(x,y)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)ds_{\xi,\eta}-$$

$$-\alpha G(x,y,x_0,y_0)-\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}.$$

Поэтому

$$W(x,y)=\iint_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)ds_{\xi,\eta}-$$

$$-\alpha G(x,y,x_0,y_0)-\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}. \tag{13}$$

Формула (13) дает решение неоднородного уравнения Лапласа в проколотой области Ω_0.

Теорема 3. *Краевая задача для неоднородного уравнения Лапласа в проколотой области* Ω_0

$$\Delta W(x,y)=f(x,y) \tag{14}$$

с граничными условиями

$$W(x,y)\big|_{\partial\Omega}=h(x,y)\big|_{\partial\Omega}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial W(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial W(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\}= \tag{15}$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial h(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial h(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W\left(x_0-\delta,y\right)-W\left(x_0+\delta,y\right)\right]dy=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h\left(x_0-\delta,y\right)-h\left(x_0+\delta,y\right)\right]dy;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W\left(x,y_0-\delta\right)-W\left(x,y_0+\delta\right)\right]dx=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h\left(x,y_0-\delta\right)-h\left(x,y_0+\delta\right)\right]dx$$

при любой части f *имеет единственное решение, и оно задается по формуле* (13).

Для доказательства теоремы 3 приведем следующие леммы.

Лемма 1. Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F\left(x,y\right)$ справедливы следующие равенства:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial F\left(x_0+\delta,y\right)}{\partial x}-\frac{\partial F\left(x_0-\delta,y\right)}{\partial x}\right]dy+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial F\left(x,y_0+\delta\right)}{\partial y}-\frac{\partial F\left(x,y_0-\delta\right)}{\partial y}\right]dx\right\}=0; \qquad (16)$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[F\left(x_0-\delta,y\right)-F\left(x_0+\delta,y\right)\right]dy=0; \qquad (17)$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[F\left(x,y_0-\delta\right)-F\left(x,y_0+\delta\right)\right]dx=0. \qquad (18)$$

Доказательство леммы 1. Так как справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\frac{\partial F\left(x_0+\delta,y\right)}{\partial x}-\frac{\partial F\left(x_0-\delta,y\right)}{\partial x}\right\}=0;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\frac{\partial F\left(x,y_0+\delta\right)}{\partial y}-\frac{\partial F\left(x,y_0-\delta\right)}{\partial y}\right\}=0;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left[F\left(x_0-\delta,y\right)-F\left(x_0+\delta,y\right)\right]=0;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left[F\left(x,y_0-\delta\right)-F\left(x,y_0+\delta\right)\right]=0,$$

то очевидным образом вытекают требуемые соотношения. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для функции $G\left(x,y,x_0,y_0\right)$ справедливы следующие равенства:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G\left(x_0+\delta,y,x_0,y_0\right)}{\partial x}-\frac{\partial G\left(x_0-\delta,y,x_0,y_0\right)}{\partial x}\right]dy+\right. \qquad (19)$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G\left(x,y_0+\delta,x_0,y_0\right)}{\partial y}-\frac{\partial G\left(x,y_0-\delta,x_0,y_0\right)}{\partial y}\right]dx\right\}=1;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[G\left(x_0-\delta,y,x_0,y_0\right)-G\left(x_0+\delta,y,x_0,y_0\right)\right]dy=0; \qquad (20)$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[G\left(x,y_0-\delta,x_0,y_0\right)-G\left(x,y_0+\delta,x_0,y_0\right)\right]dx=0. \qquad (21)$$

Доказательство леммы 2. Проверим соотношение (19). Напомним, что $G\left(x,y,x_0,y_0\right)=d\cdot\ln\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right)$, а ее производная по x и по y соответственно будет $\dfrac{\partial G\left(x,y,x_0,y_0\right)}{\partial x}=d\cdot\dfrac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$ и $\dfrac{\partial G\left(x,y,x_0,y_0\right)}{\partial y}=d\cdot\dfrac{2\left(y-y_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$.

Тогда

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G\left(x_0+\delta,y,x_0,y_0\right)}{\partial x}-\frac{\partial G\left(x_0-\delta,y,x_0,y_0\right)}{\partial x}\right]dy+\right.$$

$$+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y}-\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y}\right]dx\Bigg\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2(x_0+\delta-x_0)}{(x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}-d\cdot\frac{2(x_0-\delta-x_0)}{(x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]dy+$$

$$+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2(y_0+\delta-y_0)}{(x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2}-d\cdot\frac{2(y_0-\delta-y_0)}{(x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2}\right]dx\Bigg\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\delta}{\delta^2+(y-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2\delta}{\delta^2+(y-y_0)^2}\right]dy+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\delta}{(x-x_0)^2+\delta^2}-d\cdot\frac{-2\delta}{(x-x_0)^2+\delta^2}\right]dx\Bigg\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{4\delta d}{\delta^2+(y-y_0)^2}dy+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{4\delta d}{(x-x_0)^2+\delta^2}dx\Bigg\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\Bigg\{4darctg\frac{y-y_0}{\delta}\Bigg|_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}+4darctg\frac{x-x_0}{\delta}\Bigg|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Bigg\}=$$

$$=4darctg1-4darctg(-1)+4darctg1-4darctg(-1)=2\pi d.$$

Так как $d=\dfrac{1}{2\pi}$, то данный предел будет равен 1.

Теперь проверим соотношение (20)

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)-G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)\right]dy=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\ln\left((x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)-d\ln\left((x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\right]dy=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\ln\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)-d\ln\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)\right]dy=0.$$

Теперь проверим соотношение (21)

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)-G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)\right]dx=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2\right)-d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2\right)\right]dx=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)-d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)\right]dx=0.$$

Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. Для $\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}$ справедливы следующие равенства:

$$\lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial x}-\frac{\partial^2 G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial x}\right]dy+ \tag{22}$$

$$+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y}-\frac{\partial^2 G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y}\right]dx\Bigg\}=0$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}-\frac{\partial G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]dy=1; \tag{23}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0}-\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]dx=0. \qquad (24)$$

Доказательство леммы 3. Так как $G(x,y,x_0,y_0)=d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$, то $\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}=d\cdot\dfrac{-2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Вычислим производные по x и по y, тогда получим

$$\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial x}=d\cdot\frac{2\left((x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y}=d\cdot\frac{4(x-x_0)(y-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}.$$

Проверим соотношение (22)

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial x}-\frac{\partial^2 G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial x}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y}-\frac{\partial^2 G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\left((x_0+\delta-x_0)^2-(y-y_0)^2\right)}{\left((x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}-d\cdot\frac{2\left((x_0-\delta-x_0)^2-(y-y_0)^2\right)}{\left((x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{4(x-x_0)(y_0+\delta-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2\right)^2}-d\cdot\frac{4(x-x_0)(y_0-\delta-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2\right)^2}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\left(\delta^2-(y-y_0)^2\right)}{\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)^2}-d\cdot\frac{2\left(\delta^2-(y-y_0)^2\right)}{\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)^2}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{4(x-x_0)\delta}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}+d\cdot\frac{4(x-x_0)\delta}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}0dy+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}d\cdot\frac{8(x-x_0)\delta}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{8d\delta(x-x_0)dx}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{4d\delta d\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left.\frac{-4d\delta}{(x-x_0)^2+\delta^2}\right|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}=\lim_{\delta\to+0}\left(\frac{-4d\delta}{(x_0+\delta-x_0)^2+\delta^2}+\frac{-4d\delta}{(x_0-\delta-x_0)^2+\delta^2}\right)=0.$$

Теперь проверим соотношение (23):

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}-\frac{\partial G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]dy=$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(x_0-\delta-x_0)}{(x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2(x_0+\delta-x_0)}{(x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]dy=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\delta}{\delta^2+(y-y_0)^2}+d\cdot\frac{2\delta}{\delta^2+(y-y_0)^2}\right]dy=4d\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\delta dy}{\delta^2+(y-y_0)^2}=$$

$$=4d\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{d\left(\frac{y-y_0}{\delta}\right)}{1+\left(\frac{y-y_0}{\delta}\right)^2}=4d\lim_{\delta\to+0}arctg\frac{y-y_0}{\delta}\Big|_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}=4d\cdot arctg1-4d\cdot arctg(-1)=2\pi d$$

Так как $d=\dfrac{1}{2\pi}$, то данный предел равен 1.

Проверим соотношение (24):

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0}-\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]dx=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2}\right]dx=$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\delta^2}-d\cdot\frac{-2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\delta^2}\right]dx=0.$$

Лемма 4. Для $\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ справедливы следующие равенства:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial x}-\frac{\partial^2 G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial x}\right]dy+\right. \tag{25}$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial y}-\frac{\partial^2 G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial y}\right]dx\right\}=0$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}-\frac{\partial G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]dy=0; \tag{26}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0}-\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]dx=1. \tag{27}$$

Доказательство леммы 4. Проверим соотношение (25). Так как $G(x,y,x_0,y_0)=$ $=d\cdot\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$, то $\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}=\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}$, тогда

$$\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}=d\cdot\frac{-2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Вычислим производные по x и по y, тогда получим

$$\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial x}=d\cdot\frac{4(x-x_0)(y-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial y}=d\cdot\frac{2\left((y-y_0)^2-(x-x_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}.$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial x}-\frac{\partial^2 G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial x}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial y}-\frac{\partial^2 G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0\partial y}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{4(x_0+\delta-x_0)(y-y_0)}{\left((x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}-d\cdot\frac{4(x_0-\delta-x_0)(y-y_0)}{\left((x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\left((y_0+\delta-y_0)^2-(x-x_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2\right)^2}-d\cdot\frac{2\left((y_0-\delta-y_0)^2-(x-x_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2\right)^2}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{4\delta(y-y_0)}{\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)^2}+d\cdot\frac{4\delta(y-y_0)}{\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)^2}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\left(\delta^2-(x-x_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}-d\cdot\frac{2\left(\delta^2-(x-x_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2+\delta^2\right)^2}\right]dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{8d\delta(y-y_0)}{\left(\delta^2+(y-y_0)^2\right)^2}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}0dx\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{8d\delta(y-y_0)dy}{\left((y-y_0)^2+\delta^2\right)^2}=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{4d\delta d\left((y-y_0)^2+\delta^2\right)}{\left((y-y_0)^2+\delta^2\right)^2}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left.\frac{-4d\delta}{(y-y_0)^2+\delta^2}\right|_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}=\lim_{\delta\to+0}\left(\frac{-4d\delta}{(y_0+\delta-y_0)^2+\delta^2}+\frac{-4d\delta}{(y_0-\delta-y_0)^2+\delta^2}\right)=0.$$

Теперь проверим (26):

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}-\frac{\partial G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]dy=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(y-y_0)}{(x_0-\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2(y-y_0)}{(x_0+\delta-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]dy=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(y-y_0)}{\delta^2+(y-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2(y-y_0)}{\delta^2+(y-y_0)^2}\right]dy=0.$$

Теперь проверим (27):

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0}-\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]dx=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{-2(y_0-\delta-y_0)}{(x-x_0)^2+(y_0-\delta-y_0)^2}-d\cdot\frac{-2(y_0+\delta-y_0)}{(x-x_0)^2+(y_0+\delta-y_0)^2}\right]dx=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[d\cdot\frac{2\delta}{(x-x_0)^2+\delta^2}-d\cdot\frac{-2\delta}{(x-x_0)^2+\delta^2}\right]dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{4d\delta dx}{(x-x_0)^2+\delta^2}=$$

$$= 4d \lim_{\delta\to+0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{d\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)^2+1} = 4d \cdot arctg \frac{x-x_0}{\delta}\Bigg|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} = 4d \cdot arctg 1 - 4d \cdot arctg(-1) = 2\pi d\ .$$

Так как $d = \dfrac{1}{2\pi}$, то данный предел равен 1.

Доказательство теоремы 3. Проверим для $W(x,y)$ соотношение (14). Справедливость равенства (14) следует из того, что верны (7) и (5). Проверим для $W(x,y)$ первое соотношение из (15). Пусть $(x,y)\in\partial\Omega$. Тогда из равенства 4) теоремы 2 и соотношений (14), (9) и (16), (17), (18) из леммы 1 следует требуемое граничное соотношение из (15). Справедливость второго соотношения из (15) следует из равенства 4) теоремы 2 и соотношений (13), (9), а также леммы 2. Выполнение второго граничного условия покажем подробнее:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial W(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial W(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\}=$$

$$=\int_{\Omega}\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial F(x_0+\delta,y,\xi,\eta)}{\partial x}-\frac{\partial F(x_0-\delta,y,\xi,\eta)}{\partial x}\right]dy+\right.$$

$$+\int_{\partial\Omega}\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 F(x_0+\delta,y,\xi,\eta)}{\partial x\partial \bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial^2 F(x_0-\delta,y,\xi,\eta)}{\partial x\partial \bar{n}_{\xi,\eta}}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial^2 F(x,y_0+\delta,\xi,\eta)}{\partial y\partial \bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial^2 F(x,y_0-\delta,\xi,\eta)}{\partial y\partial \bar{n}_{\xi,\eta}}\right]dx\right\}h(\xi,\eta)\,ds_{\xi,\eta}-$$

$$-\alpha\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x}-\frac{\partial G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)}{\partial x}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)}{\partial y}-\frac{\partial G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)}{\partial y}\right]dx\right\}-$$

$$-\beta\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[G(x_0-\delta,y,x_0,y_0)-G(x_0+\delta,y,x_0,y_0)\right]dy-$$

$$-\gamma\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[G(x,y_0-\delta,x_0,y_0)-G(x,y_0+\delta,x_0,y_0)\right]dx=\alpha\ .$$

Остальные граничные условия доказываются аналогичным образом.

Теперь покажем, как, используя теорему 3, можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного гармонического уравнения в проколотой области Ω_0.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x,y)$, т.е. пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним: $h(x,y)$ — достаточно гладкая функция в проколотой области Ω_0. Итак, пусть $h = K(f)$. Тогда задача (14)–(15) примет вид:

$$\Delta W(x,y)=f(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega_0, \tag{28}$$

$$W(x,y)\big|_{\partial\Omega}-K(\Delta W)\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{29}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial W(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial W(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\}=$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial K(\Delta W)(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial K(\Delta W)(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial K(\Delta W)(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial K(\Delta W)(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W(x_0-\delta,y)-W(x_0+\delta,y)\right]dy=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[K(\Delta W)(x_0-\delta,y)-K(\Delta W)(x_0+\delta,y)\right]dy;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W(x,y_0-\delta)-W(x,y_0+\delta)\right]dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[K(\Delta W)(x,y_0-\delta)-K(\Delta W)(x,y_0+\delta)\right]dx.$$

Условие (29), накладываемое на функцию $W(x,y)$, можно интерпретировать как дополнительное условие для того, чтобы уравнение (28) при любой правой части $f(x,y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (28)–(29) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новым «краевым» условием вида (29). Слово «краевое» пишем в кавычках из-за того, что в общем случае это условие не является граничным. Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора* K, *отображающего пространство* $\{f\}\in L_2(\Omega_0)$ *в множество гладких функций* $\{h\}\in W_2^2(\Omega_0)$, *задача* (28)–(29) *имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях* f.

Теперь докажем обратное утверждение

Теорема 5. *Если уравнение* (28) *при всех допустимых правых частях* f *с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор* K, *отображающий пространство* $\{f\}\in L_2(\Omega_0)$ *в множество гладких функций* $\{h\}\in W_2^2(\Omega_0)$, *такой, что дополнительное условие примет вид* (29).

Доказательство теоремы 5. Пусть уравнение (28) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x,y)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,y,f)$. Введем функцию $u(x,y,f)=\iint_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$ и составим разность

$$v(x,y)=W(x,y,f)-u(x,y,f). \tag{30}$$

Ясно, что $v(x,y)$ является решением однородного уравнения $\Delta v=0$ и однозначно определяется по f. Таким образом, любому элементу f соответствует единственная функция v, которая представляет достаточно гладкую функцию и является гармонической функцией. Обозначим через K оператор, ставящий каждой f в соответствие v, т.е. $v=K(f)$. Рассмотрим совершенно новую функцию по формуле

$$w(x,y)=W(x,y,f)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}v(\xi,\eta)ds_{\xi,\eta}-$$

$$-\alpha G(x,y,x_0,y_0)-\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}.$$

Последняя формула аналогична формуле (13). В данном случае роль $h(x,y)$ играет функция $v(x,y)$.

Следовательно, приведенные выше рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\Delta w(x,y)=f(x,y), \tag{31}$$

$$w(x,y)\big|_{\partial\Omega}=v(x,y)\big|_{\partial\Omega},$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial w(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial w(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial w(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial w(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\}=$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial v(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial v(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[w(x_0-\delta,y)-w(x_0+\delta,y)\right]dy=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[v(x_0-\delta,y)-v(x_0+\delta,y)\right]dy;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[w(x,y_0-\delta)-w(x,y_0+\delta)\right]dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[v(x,y_0-\delta)-v(x,y_0+\delta)\right]dx,$$

где $v(x,y)=K(f)$ или $v(x,y)=K(\Delta w)$.

С другой стороны, из представления (30) следует, что $W(x,y,f)=u(x,y,f)+v(x,y)$ также удовлетворяет соотношениям (31). Поэтому из теоремы единственности вытекает, что $W(x,y,f)=w(x,y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (31). Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

1. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функц. анализ и его приложения. — 1986. — Т. 20. — № 3. — С. 55–65.
2. *Павлов Б.С.* Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат.наук. — 1987. — Т. 42. — № 6(258). — С. 99–131.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.

УДК 621.3.083

Т.Л.Тен[1], Г.Д.Когай[2]

[1]Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза;
[2]Карагандинский государственный технический университет

ПРОГРАММНО-ЦЕЛЕВОЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Мақалада ақпараттық жүйелерді көп деңгейлі иерархияларын жобалаудың программа-мақсатты әдісі қарастырылған. Жүйелік қызметтің негізгі әдістерінің бірі құрылымның элементтерімен шешетін максималды идеалына сәйкес келетін бар құрылымды иерархияға айналдыру болып табылады. Бар құрылымды талдайтын әдіс құрастырылған және одан оңтайлы иерархия қалыптастыру, онда мақсатты жүйе иерархиясының максималды дәрежесінде басқарудың тапсырмаларын үлестіру қарастырылған.

Program-special method of multilevel information system's development is considered at this work. One of the main appointment of system activity is reformation of existent structure to hierarchy, the limit equal to ideal {Sa}, solvable by structure elements, making either layer. There is developed the method of existent structure's analysis and optimal hierarchy's formation from it, where the classification of management problems the limit accord to hierarchy of system's aims.

Информационно-измерительные системы (ИИС) имеют иерархическую структуру управления, это является объективным требованием управления в соответствии с целями. Однако нередко фактическая структура, проявляющаяся при функционировании, отличается от нормативной (соответствующей дереву целей). Это объясняется, прежде всего, тем, что в современных ИИС происходит постоянная корректировка целей управления [1].

Структура управления ИИС, сформировавшаяся без использования приемов системной деятельности, как правило, не полностью соответствует программно-целевому управлению. Это обстоятельство, которому часто не придают значения, является основным фактором принятия нерациональных,