Ряд в правой части при $\beta \geq \theta\left(1-\frac{1}{q}\right)$ расходится. Тогда условие (1) будет выполняться только для постоянных функций, следовательно, ряд (2) равномерно сходится.

Список литературы

1. *Голубов Б.И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9. — С. 297–314.
2. *Ульянов П.Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. — 1967. — Т. 72. — С. 193–225.
3. *Ciesielski Z., Musielak J.* On absolute convergence of Haar series // Colloq. math. — 1959. — Vol. 7. — P. 61–65.
4. *Акишев Г.* О сходимости рядов по обобщенной системе Хаара // Математический журн. — 2002. — Т. 2. — № 3.
5. *Голубов Б.И., Рубинштейн А.И.* Об одном классе систем сходимости // Мат. сб. — 1966. — Т. 71. — С. 93–112.
6. *Акишев Г.А., Махашев С.Т.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара // Изв. вузов, матем. — 2000. — № 3. — С. 16–25.
7. *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. — 1970. — Т. 81. — С. 104–131.
8. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М., 1978. — С. 147.

УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылған. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттелініп отырған есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары тағайындалған.

The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem's solution for system of hyperbolic equations is offered. The sufficient conditions of algorithm's convergence and unique solvability of investigating problem are established.

Пусть $C(\overline{\Omega}, R^n)$ — пространство функций $u:\overline{\Omega} \to R^n$, непрерывных на $\overline{\Omega}$, с нормой $\|u(x,t)\| = \max\limits_{(x,t)\in\Omega}\|u(x,t)\|$. Для функций $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ при фиксированном $x\in[0,\omega]$ введем норму

$$\|u(x,\cdot)\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|.$$

Постановка задачи. Пусть $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и имеет частные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$; $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$. В области $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \quad u\in R^n, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=u(\omega,t), \quad t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0)=u(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $f:\overline{\Omega}\times R^n\times R^n \to R^n$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и

$$f\left(x,0,u(x,0),\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}\right)=f\left(x,T,u(x,T),\frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right).$$

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами, среди них отметим работы [1–8], где можно найти обзор и библиографию подобного рода задач. В [9] была рассмотрена нелинейная полупериодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений со смешанной производной и получены достаточные условия разрешимости поставленной задачи.

В данной работе рассматривается периодическая по двум переменным краевая задача для системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанной производной. Для исследования задачи (1)-(3) применяются результаты, установленные в [9]. Здесь получены достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также существования изолированного решения нелинейной краевой задачи (1)-(3).

Обозначим через $\mu(t)$ значение неизвестной функции $u(x,t)$ при $x=0$ и выполним замену $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\mu(t)$. Тогда задача (1)-(3) сведется к следующей эквивалентной задаче с функциональным параметром:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\bar{\Omega}; \tag{4}$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T]; \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega]; \tag{6}$$

$$\tilde{u}(\omega,t)=0,\quad t\in[0,T]; \tag{7}$$

$$\mu(0)=\mu(T). \tag{8}$$

Последнее равенство следует из соотношений (3), (6). В силу (8) вытекающее из (3) равенство $\tilde{u}(x,0)+\mu(0)=\tilde{u}(x,T)+\mu(T)$ записано в виде (6).

Лемма 1. *Если $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $\left(\mu(t)=u(0,t),\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-u(0,t)\right)$ — решение задачи (4)–(8). Наоборот, если пара $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$ — решение задачи (4)–(8), то функция $u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+\mu(t)$ является решением задачи (1)–(3).*

Введение функционального параметра $\mu(t)$ позволяет процесс нахождения решения задачи (4)–(8) разбить на два пункта:

1) определение функции $\mu(t)$;

2) определение функции $\tilde{u}(x,t)$.

При найденном $\mu(t)$ функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением полупериодической краевой задачи (4)–(6). Поскольку из условий (5), (7) вытекают равенства

$$\frac{\partial\tilde{u}(0,t)}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial\tilde{u}(\omega,t)}{\partial t}=0$$

для всех $t\in[0,T]$, то, интегрируя обе части (4) по $x\in[0,\omega]$, для определения неизвестной функции $\mu(t)$ получим систему дифференциальных уравнений, не разрешенную относительно производной

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $\tilde{u}(x,t)$, $\mu(t)$ имеем замкнутую систему уравнений (4)–(6) и (9).

Предполагая, что $\tilde{u}(x,t)=0$, из уравнения (9) находим $\mu^{(0)}(t)$. Предположим, что задача (4)–(6) при $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$ имеет решение $\tilde{u}^{(0)}(x,t)\in C\left(\bar{\Omega},R^n\right)$. Множество таких $\mu^{(0)}(t)\in C\left([0,T],R^n\right)$ обозначим через $G(f,t)$, а соответствующее $\mu^{(0)}(t)$ решение задачи (4)-(6) через $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$.

Взяв $\mu^{(0)}(t)\in G(f,t)$, ему соответствующую $\tilde{u}^{(0)}(x,t)$, непрерывные на $[0,\omega]$ функции $R(x)>0$, число $\psi>0$, построим множества

$$S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)=\left\{\mu(t)\in C\left([0,T],R^n\right):\left\|\mu(\cdot)-\mu^{(0)}(\cdot)\right\|_1<\psi\right\};$$

$$S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)=\left\{\tilde{u}(x,t)\in C\left(\overline{\Omega},R^n\right):\left\|\tilde{u}(x,\cdot)-\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<R(x)\psi,\quad \left\|\tilde{u}_x(x,\cdot)-\tilde{u}_x(x,\cdot)\right\|_1<R(x)\psi\right\};$$

$$G_2^0\left(R(x),\psi\right)=\left\{(x,t,u,v):(x,t)\in\overline{\Omega},\left\|u-\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)-\mu^{(0)}(\cdot)\right\|_1<R(x)\psi,\quad \left\|v-\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)}{\partial x}\right\|_1<R(x)\psi\right\}.$$

За начальное приближение задачи (4)–(8) возьмем пару $\left(\mu^{(0)}(t),\tilde{u}^{(0)}(x,t)\right)$ и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. Предполагая, что $u(x,t)=u^{(0)}(x,t)$, из уравнения (9) находим $\mu^{(1)}(t)$

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0.$$

Функцию $\tilde{u}^{(1)}(x,t)$ определим как решение полупериодической краевой задачи

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu^{(1)}(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega};$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T];$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega],$$

где $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$.

Шаг 2. Предполагая, что $u(x,t)=u^{(1)}(x,t)$, из уравнения (9) находим $\mu^{(2)}(t)$

$$\int_0^\omega f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(1)}(\xi,t)+\mu(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(1)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=0.$$

Функцию $\tilde{u}^{(2)}(x,t)$ определим как решение полупериодической краевой задачи

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial t}=f\left(x,t,\tilde{u}+\mu^{(2)}(t),\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\overline{\Omega};$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T];$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,T),\quad x\in[0,\omega],$$

где $\mu(t)=\mu^{(2)}(t)$.

Продолжая процесс, на k-ом шаге получаем систему $\left(\mu^{(k)}(t),\tilde{u}^{(k)}(x,t)\right)$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий теоремы 1 [9] матрица* $f'_\mu\left(x,t,\tilde{u}(x,t)+\mu(t),\dfrac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}\right)$ *обратима для всех* $\left(x,\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$, где $x\in[0,\omega]$, $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)\in S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$ *и выполняются следующие неравенства:*

1) $\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|\left[\int_0^\omega f'_\mu\left(x,t,\tilde{u}(x,t)+\mu(t),\dfrac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}\right)dx\right]^{-1}\right\|\le\gamma;$

2) $q=\gamma\int_0^\omega\left(L_2(\xi)\int_0^\xi\left[b_1(\xi_1)e^{\int_0^{\xi_1}b_1(\xi_2)d\xi_2}\int_0^{\xi_1}b_2(\xi_2)d\xi_2+b_2(\xi_1)\right]d\xi_1+L_1(\xi)\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]\right)d\xi<1;$

3) $\dfrac{\gamma}{1-q}\int_0^\omega\left[L_2(\xi)\left\|\tilde{u}(\xi,\cdot)-\tilde{u}^{(0)}(\xi,\cdot)\right\|_1+L_1(\xi)\left\|\dfrac{\partial\tilde{u}(\xi,\cdot)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,\cdot)}{\partial\xi}\right\|_1\right]d\xi+$

$$+\gamma\int_0^{\omega}\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)\right\|d\xi<\psi;$$

4) $$\int_0^x\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi\le R(x),\quad x\in[0,\omega],$$

где

$$b_1(x)=\left[c_0(x)c_1(x)+2c_0(x)+2\right]c_2(x)L_2(x);$$
$$b_2(x)=\left[c_0(x)c_1(x)+c_0(x)+1\right]\gamma(x,h)L_2(x);$$
$$c_0(x)=\frac{1}{1-q_{\nu}(x,h)}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(L_1(x)h\right)^j}{j!};$$
$$c_1(x)=\gamma_{\nu}(x,h)\frac{\left(L_1(x)h\right)^{\nu}}{\nu!};$$
$$c_2(x)=\frac{1}{1-q_{\nu}(x,h)}\sum_{j=0}^{\nu}\frac{\left(L_1(x)h\right)^j}{j!}h,$$

μ — *const*, *а обозначение функций* $\gamma(x,h)$ *и* $q_{\nu}(x,h)$ *даны в [9]. Тогда определяемая алгоритмом последовательность функций* $\left(\mu^{(k)}(t),\tilde{u}^{(k)}(x,t)\right)$, $k=1,2,\ldots$, *содержащаяся во множестве* $S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$, *сходится к решению задачи (4)-(6)* $\left(\mu^*(t),\tilde{u}^*(x,t)\right)$ *и справедливы оценки:*

а) $$\left\|\mu^*(\cdot)-\mu^{(k)}(\cdot)\right\|_1\le\frac{q^k\gamma}{1-q}\max_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^{\omega}f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi\right\|;$$

б) $$\left\|\tilde{u}^*(x,\cdot)-\tilde{u}^{(k)}(x,\cdot)\right\|_1\le\int_0^x\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi\left\|\mu^*(\cdot)-\mu^{(k)}(\cdot)\right\|_1.$$

Причем любое решение $\left(\mu(t),\tilde{u}(x,t)\right)$ *задачи (4)–(6) в* $S\left(\mu^{(0)}(t),\psi\right)\times S_1\left(\tilde{u}^{(0)}(x,t),R(x)\psi\right)$ *изолировано.*

Функции $u^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,\ldots$ определим равенством

$$u^{(k)}(x,t)=\tilde{u}^{(k)}(x,t)-\mu^{(k)}(t)$$

и через $S_1\left(u^{(0)}(x,t),[R(x)+1]\psi\right)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых по x,t функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|u(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<[R(x)+1]\psi;$$
$$\left\|u_x(x,\cdot)-u_x^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1<[R(x)+1]\psi.$$

В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) из теоремы 1 следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то последовательность функций* $\left\{u^{(k)}(x,t)\right\}$, $k=1,2,\ldots$ *содержится в* $S_1\left(u^{(0)}(x,t),[R(x)+1]\psi\right)$, *сходится к* $u^*(x,t)$ *— решению задачи* (1)–(3) *в* $S_1\left(u^{(0)}(x,t),[R(x)+1]\psi\right)$ *и справедливо неравенство*

$$\left\|u^*(x,\cdot)-u^{(k)}(x,\cdot)\right\|_1\le$$
$$\le\left\{\int_0^x\left[b_1(\xi)e^{\int_0^{\xi}b_1(\xi_1)d\xi_1}\int_0^{\xi}b_2(\xi_1)d\xi_1+b_2(\xi)\right]d\xi+1\right\}\frac{q^k\gamma}{1-q}\max_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^{\omega}f\left(\xi,t,\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)+\mu^{(0)}(t),\frac{\partial\tilde{u}^{(0)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi\right\|.$$

Причем любое решение задачи (1)–(3) *в* $S_1\left(u^{(0)}(x,t),[R(x)+1]\psi\right)$ *изолировано.*

Таким образом, установлены достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, показана разрешимость задачи (1)–(3) в шаре $S_1\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$.

Список литературы

1. *Cesari L.* Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев, 1963. — Т. 1. — С. 440–457.
2. *Veivoda O. et. al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions. — Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.
3. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев, 1984.
4. *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задач для линейных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — № 2. — С. 281–297.
5. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 232 с.
6. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 10. — С. 1343–1354.
7. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42. — № 11. — С. 1673–1685.
8. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.
9. *Орумбаева Н.Т.* Об одном алгоритме нахождения изолированного решения полупериодической краевой задачи для системы нелинейных гиперболических уравнений // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. — Караганда, 2008. — № 2(50).

УДК 517.911

А.Б.Тлеулесова

Жезказганский университет им. О.А.Байконурова

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Импульсті әсерлі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы мен ұсынылған алгоритмнің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары тағайындалған.

The conditions of reliability and convergence of offering algorithm and the existence of isolated solution of periodical two-point value problem for systems of nonlinear ordinary differential equations with impulse influence are established.

Рассматривается нелинейная периодическая краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \quad t\in\left[0,T\right]\setminus\left\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m\right\}, \quad x\in R^n; \tag{1}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_m<\theta_{m+1}=T;$$

$$x(0)=x(T); \tag{2}$$

$$x(\theta_i+0)-x(\theta_i-0)=J_i\left(\lim_{t\to\theta_i-0}x(t)\right), \quad i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $f:\left[0,T\right]\times R^n\to R^n$ — непрерывная по x, кусочно-непрерывная по t с возможным $\left(i=\overline{1,m}\right)$ и разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, вектор-функция; $J_i:R^n\to R^n$ — непрерывные вектор-функции.