$$KM \equiv KM_E^{\Phi} = \left\{ h \in L^{+}(\mathbb{R}_+) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n}) u^{**}(\tau) ,\ \ t \in \mathbb{R}_+ ,\ \ u \in M_E^{\Phi} \right\}$$

$$\rho_{KM_E^{\Phi}}(h) = inf \left\{ \|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n}) u^{**}(\tau) ,\ \ t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Теорема 1.Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Тогда существует положительная константа C, зависящая только от n такая, что

$$(M_{\Phi} f)^{**}(t) \le C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s) ,\ \ t \in (0, \infty)$$

для каждой $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Теорема 2. Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Вложение $M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно вложению $KM_E^{\Phi}(\mathbb{R}_+) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$.

Подобные вопросы для пространства обобщенных потенциалов Рисса рассмотрены в [2] и [3].

Список использованной литературы

1. C.Bennett, R.Sharpley, Interpolation of operators. Pure and applied mathematics, Volume 129. Boston, MA: Acad. Press Inc., 1988.
2. Goldman M.L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials // Complex Variables and Elliptic Equations 55:8-10, 2010, p.817-832.
3. Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials. Math.Notes. 2018. Vol. 104, No. 3, pp. 356–373.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

Джумабаева Д.Г. Нурсултанов Е.Д.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

E-mail: jamilya_ast@mail.ru

В данной работе рассматриваются анизотропные пространства типа Морри. Свойства пространств Морри и действующие в этих пространствах операторы вызывают большой интерес в последние десятилетия. Методы исследования опираются на интерполяционные свойства этих пространств.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$,через G_k обозначим множество всех кубов вида $[0, 2^k)^n + 2^k m, m \in \mathbb{Z}^n$. Пусть $\mathbb{G} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} G_k$, $Q \in G_k$. Множество взаимно не пересекающихся кубов $\mathbb{T} = \{Q\} \subset \mathbb{G}$ будет локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^n$, если $\mathbb{R}^n = \overline{\coprod_{Q\in\mathbb{T}} Q}$ и $|\mathbb{T} \cap G_k| < \infty$.

Теперь пусть $\overline{n} = (n_1, \dots, n_d)$: $n_i \in \mathbb{N}$, $|n| = n_1 + \cdots + n_d$, $\overline{k} = (k_1, \dots, k_d)$: $k_i \in \mathbb{Z}$. Обозначим $G_{\overline{k}} = \{Q = Q_1 \times \cdots \times Q_d : Q_i \in G_{k_i}, \ i = \overline{1, d}\}$, взаимно не пересекающиеся кубы $\mathbb{T}_i = \{Q_i\} \subset G_{k_i}$ – локальное разбиение пространства $\mathbb{R}^{n_i}$, множества $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_d$– локальные разбиения пространств $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_d}$ соответственно. Семейство взаимно не пересекающихся параллелепипедов $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \dots \times \mathbb{T}_d$ назовем локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^{|n|}$.

Рассмотрим вектора $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$, $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 < p_i, q_i \le \infty, i = \overline{1, d}$. Определим локальное пространство Морри $LM_{\overline{p},\overline{q}}^{\overline{\lambda}}(\mathbb{T})$ как множество измеримых функций f для которых

$$\|f\|_{LM^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k_d=1}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{-\sum_{i=1}^{d} k_i\lambda_i}\sum_{Q\in\mathbb{T}_{\overline{k}}}\|f\|_{L_{\overline{p}}(Q)}\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1}\dots\right)^{1/q_d} < \infty.$$

Теорема 1. Пусть векторы $\overline{\lambda_0} = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_d^0)$, $\overline{\lambda_1} = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_d^1)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)\overline{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, \dots, q_d), \overline{q_0} = (q_1^0, \dots, q_d^0)$, $\overline{q_1} = (q_1^1, \dots, q_d^1), \overline{n} = (n_1, \dots, n_d)$такие, что $0 < p_i \le \infty 0 < q_i^0, q_i^1, q_i \le \infty$, $-\infty < \lambda_i^0 < \lambda_i^1 < +\infty$, $\theta_i \in (0; 1)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}$ – локальное разбиение $\mathbb{R}^{|n|}$. Тогда

$$\left(LM^{\overline{\lambda}_0}_{\overline{p},\overline{q}_0}(\mathbb{T}), LM^{\overline{\lambda_1}}_{\overline{p},\overline{q}_1}(\mathbb{T})\right)_{\overline{\theta},\overline{q}} = LM^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}(\mathbb{T}),$$

где $\lambda_i = (1-\theta_i)\lambda_i^0 + \theta_i\lambda_i^1$.

Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$, $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $0 < \lambda_i < \infty$, $0 < p_i, q_i \le \infty$, $i = \overline{1, d}$. Обобщенные анизотропные пространства типа Морри определим как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L_{\overline{p}}^{loc}(\mathbb{R}^d)$, для которых

$$\|f\|_{M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}}} = \left(\sum_{k_d=1}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{-\sum_{i=1}^{d} k_i\lambda_i}\sum_{Q\in G_{\overline{k}}}\|f\|_{L_{\overline{p}}(Q)}\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1}\dots\right)^{1/q_d} < \infty.$$

Теорема 2. Пусть векторы $\overline{\lambda_0} = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_d^0)$, $\overline{\lambda_1} = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_d^1)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)\overline{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, \dots, q_d), \overline{q_0} = (q_1^0, \dots, q_d^0)$, $\overline{q_1} = (q_1^1, \dots, q_d^1)$такие, что $0 < p_i \le \infty 0 < q_i^0, q_i^1, q_i \le \infty$, $\lambda_i^0 \ne \lambda_i^1$, $\theta_i \in (0; 1)$. Тогда

$$\left(M^{\overline{\lambda}_0}_{\overline{p},\overline{q}_0}, M^{\overline{\lambda_1}}_{\overline{p},\overline{q}_1}\right)_{\overline{\theta},\overline{q}} \hookrightarrow M^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{q}},$$

где $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$: $\lambda_i = (1-\theta_i)\lambda_i^0 + \theta_i\lambda_i^1$.

Работа выполнена в рамках гранта AP14870758.

Список использованной литературы

1. Burenkov V.I. Recent progress in studing the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II. Eurasian Mathematical Journal 4 (1) (2013) 21-45.
2. Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D. Marcinkiewicz-type interpolation theorem and estimates for convolutions for Morrey-type spaces. Eurasian Math. J. 9 (2) (2018) 82-88.
3. Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D. Marcinkiewicz-type interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries. Complex Var. Elliptic Equ., 65 (1) (2020) 87-108.
4. Burenkov V. I., Nursultanov E. D. Interpolation Theorems for Nonlinear Operators in General Morrey-Type Spaces and Their Applications. Proc. Steklov Inst. Math. 312 (2021) 124–149.