Таким образом, исследованы числа переноса ионов меди и никеля через катионитовые мембраны МК-40 и МФ-4СК из аммиачных и цитратных растворов. Главной особенностью полученных результатов является то, что суммарное значение чисел переноса значительно превышает единицу.

Из многих отличий сульфокатионитовых мембран – гетерогенной МК-40 и гомогенной МФ-4СК на показатели переноса ионов определяющее влияние оказывает различие в их гидрофобности. На более гидрофобной мембране МФ-4СК соотношение $t(NH_4^+)/t(Me^{2+})$ выше чем на МК-40.

Литература:
1. Файнберг С. Ю., Филлипова Н.А. Анализ руд цветных металлов. - Москва: Химия, 1974. – 406 с.
2. 23. Карякин Ю.В., Ангелов И.И. Чистые химические вещества. – Москва: Химия, 1974. – 406 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ФАКТОРА ВРЕМЕНИ

Омаров А.М., доцент
кафедры прикладной математики и информатики;
Попова Н.В., ст. преподаватель; Есендаулетова Ж.Т., ст. преподаватель
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан

В статье рассмотрены две задачи распределительного типа. Первая задача связана с промежуточными пунктами, а вторая - минимизация функции с учетом доставки груза по времени. С помощью математических преобразований задача сводиться к транспортной и реализуется с помощью известных методов.

Ключевые слова: транспортная задача, экстремум функции, время, метод потенциалов, поставщик, потребитель

На практике при перевозке грузов могут возникнуть различные дополнительные условия, которые необходимо учитывать при планировании. Одним из таких условий может стать невозможность поставок продукции некоторым потребителям определенными поставщиками по дорожным условиям, из-за договорных отношений, ввиду специальных требований к продукции или подвижному составу. Простейшими модификациями классической распределительной задачи являются транспортные задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций и транспортные задачи с запретами. Такое ограничение можно учесть при решении, если в клетку, которая лежит на пересечении строки соответствующего потребителя и столбца соответствующего поставщика, вместо фактического расстояния между пунктами записать расстояние, значительно большее любого другого расстояния в заданной матрице.

Многие задачи транспортного типа, такие, как, например, транспортная задача с перевалочными пунктами (или с промежуточной обработкой), транспортная задача с резервированием, могут быть в ряде случаев с помощью искусственных преобразований сведены к классической транспортной задаче.

В ряде случаев перевозки грузов могут осуществляться в несколько этапов. Так, сельскохозяйственные продукты из фермерских и крестьянских хозяйств вначале поступают на приемные пункты, затем или на элеваторы, или непосредственно потребителям, или в торговую сеть. Если приемные пункты, которые в данном случае являются промежуточными, имеют резервные мощности, то целесообразно совместное решение задачи о перевозках из начальных на промежуточные пункты и из промежуточных на конечные. Такое совместное решение на минимум транспортной работы производится в матрице специального вида.

Покажем это на примере решения задачи о перевозке зерна из дальних фермерских хозяйств на хлебоприемные пункты и с них на элеваторы. Зерно можно перевозить и непосредственно из фермерских хозяйств на элеваторы.

В таблице 1 представлена матрица такой многоэтапной транспортной задачи [1]. В итоговом столбце указаны количество зерна, которое нужно вывезти из каждого фермерского хозяйства, и возможный вывоз зерна из каждого приемного пункта. Так как мощность элеваторов по приему зерна (750 т) больше, чем предполагается заготовить в фермерских хозяйствах (650 т), то введен фиктивный поставщик с объемом поставок 100 т. В итоговой строке указаны объемы, которые можно завозить на каждый приемный пункт и каждый элеватор. Так как количество зерна, заготовляемого в фермерских хозяйствах, меньше мощности приемных пунктов, в клетках матрицы, которые относятся к столбцу и строке одного и того же приемного пункта, проставлены нули, показывающие, что в случае загрузки этой клетки она определит мощность, которая останется в резерве в данном приемном пункте. Буквой М условно обозначают расстояние, которое значительно больше любого другого расстояния в матрице, и загрузка в эту клетку не попадет. К клеткам с буквой М в данном случае относятся те, которые связывают между собой приемные пункты, перевозки между которыми запрещены. То же самое относится и к перевозкам от фиктивного поставщика к хлебоприемным пунктам.

Таблица 1

Отправители	Хлебоприемные пункты			Элеваторы		Итого
	№1	№2	№3	№1	№2	
Фермерское хозяйство №1	10 100	5	40	50	80	100
Фермерское хозяйство №2	45	10 150	70	85	150	150
Фермерское хозяйство №3	60	20 100	80	70 100	115	200
Фермерское хозяйство №4	50	70	15 200	80	50	200
Приемный пункт №1	0 150	М	М	20 100	50	250
Приемный пункт №2	М	0	М	5 50	25 200	250
Приемный пункт №3	М	М	0 100	25	15 200	300
Фиктивный поставщик	М	М	М	0 100	0	100
Итого	250	250	300	350	400	1550

Такая задача решается так же, как транспортная задача линейного программирования. Кроме того, в таблице 1 показано оптимальное решение, полученное с помощью метода потенциалов. Оно показывает, что прямая перевозка целесообразна только из фермерского хозяйства №3 на элеватор №1 в объеме 100 т зерна. Остальное зерно целесообразно возить из фермерских хозяйств на хлебоприемные пункты, а уже оттуда на элеваторы. При этом будет обеспечена минимальная работа автомобилей.

Заметим, что если бы одним из условий этой задачи была необходимость поставки зерна из фермерских хозяйств только через хлебоприемные пункты, то в клетках матрицы, связывающих фермерские хозяйства с элеваторами, нужно было бы вместо расстояний поставить букву М и решать, как обычно.

При перевозках скоропортящихся продуктов, некоторых строительных материалов (бетона) и других возникает необходимость доставить грузы в наиболее короткий срок. В этих случаях необходимо получить решение, обеспечивающее перевозки грузов в минимальное время при условии достаточного количества автомобилей. Порядок решения такой задачи несколько отличается от порядка, рассмотренного ранее.

Если в матрице вместо расстояний в верхних правых углах клеток проставить время доставки в часах и решение выполнить с помощью метода потенциалов (таблица 2), то будет получено решение, обеспечивающее минимум затрат автомобиле/часов на все эти перевозки, но не самый короткий срок доставки груза потребителям.

Т а б л и ц а 2

Получатели	Поставщики				Потребность в грузе, т
	A_1	A_2	A_3	A_4	
$Б_1$	18	20 60 +	30	29 15 -	75
$Б_2$	10 30	75 X	34	45 X	30
$Б_3$	30	35 X	18 50	20 20	70
$Б_4$	11 10	* 27 -	45 X	35 25 +	35
$Б_5$	5 30	* 31	* 28	60 X	30
Наличие груза, т	70	60	50	60	240

Из решения, полученного в таблице 2, видно, что наиболее длительная доставка продукции будет иметь место от поставщика A_4 потребителю $Б_4$, которая займет 35 ч. Однако можно найти план перевозок, где наиболее длительная доставка будет занимать меньше времени. Для этого после получения решения необходимо дополнительно проделать следующие операции:

- найти загруженную клетку, в которой имеется наибольшее время доставки груза. В таблице 2 этой клеткой будет $A_4Б_4$ со временем 35 ч;

- обвести это число кружком и исключить из дальнейшего анализа все клетки матрицы, где время доставки больше этого времени. Такими клетками будут $A_2Б_2$,, $A_4Б_2$, $A_3Б_4$, $A_2Б_3$ и $A_4Б_5$. Перечеркнуть эти клетки знаком X;

- найти в таблице возможность построения контура, для которого одной вершиной служит клетка с кружком, а другой — незагруженная клетка с временем, меньшим, чем в клетке с кружком, и такая, что если начать с нее поочередное присвоение знаков «—» и « + », клетке с кружком будет присвоен знак « + ». В таблице 2 такими незагруженными клетками являются $A_2Б_4$, $A_2Б_5$, $A_3Б_5$. Они обозначены звездочкой;

- из этих клеток выбрать клетку с наименьшим временем доставки груза ($A_2Б_4$) и для нее строить контур, вершины которого отметить знаками «—» и « + », начиная с незагруженной клетки, которой присваивается знак «—». В таблице 2 контур показан штриховой линией;

- определить, является ли загрузка клетки, где время доставки обведено кружком, наименьшей по сравнению с загрузкой других клеток, отмеченных знаком « + ». Если она является наименьшей, то цифру этой загрузки вычесть из загрузки клеток, отмеченных знаком « + », и прибавить к цифрам загрузки клеток, обозначенных знаком « - ».

В таблице 2 загрузка в клетке $A_4Б_4$ является наименьшей по сравнению с загрузкой в другой клетке, отмеченной знаком « + », поэтому строим новый вариант распределения, который представлен в таблице 3.

Т а б л и ц а 3

Получатели	Поставщики				Потребность в грузе, т
	A_1	A_2	A_3	A_4	
$Б_1$	18	20 35 +	30 X	29 40 -	75
$Б_2$	10 30	75 X	34 X	45 X	30
$Б_3$	30 X	35 X	28 50 -	20 20 +	
$Б_4$	11 10 +	27 25 -	45 X	35 X	35
$Б_5$	5 30 -	31 X	28 * +	60 X	30
Наличие груза, т	70	60	50	60	240

Эти операции повторяем все время, пока в таблице имеются незагруженные клетки с меньшим сроком доставки груза, чем срок, обведенный кружком. Если при этом для них можно построить контур, у которого одной из вершин со знаком « + » будет клетка с наибольшим сроком доставки груза, а загрузка этой клетки будет меньше, чем в любой другой клетке со знаком « + ». Проделаем в таблице 3 все операции, описанные ранее. В таблице 3 обведено кружком число 29. Все клетки, где время доставки больше 29 ч, исключены из дальнейшего анализа. Единственной незагруженной клеткой, для которой можно построить контур таким образом, чтобы в клетке с обведенным числом стоял знак « + », является клетка $A_3Б_5$. Однако сравнение загрузки всех клеток, обозначенных знаком « + », показывает, что наименьшая цифра загрузки 25 будет в клетке $A_2Б_4$, а не в клетке $A_4Б_1$, где время доставки груза обведено кружком. Это означает, что перемещение цифры наименьшей загрузки из клеток со знаком « + » в клетки со знаком «—» не освободит полностью клетку $A_4Б_1$ от груза, и поэтому какая-то часть груза все равно будет доставляться за 29 ч, т.е. получить новый вариант перевозок, обеспечивающий меньший срок доставки груза, невозможно. Следовательно, распределение, полученное в таблице 3, является по срокам доставки груза оптимальным.

Сравнивая таблицу 2 с таблицей 3, можно видеть, что если в первом случае весь груз будет доставлен потребителям через 35 ч (клетка $A_4Б_4$ в таблице 2), то во втором случае потребители получат груз через 29 ч после начала перевозок (клетка $A_4Б_1$ в таблице 3).

Далее рассмотрим задачу по обеспечению ритмичности поставок [2]. Суть данной задачи состоит в следующем. Задан поставщик, который обслуживает группу получателей. Получатели оформляют заявки на перевозки, в которых указывают желаемые объемы и дни получения груза. Идеальной была бы ситуация, когда в каждый из дней производство было бы сбалансировано с потреблением. На практике гораздо реальнее, когда в одни дни потребности получателей превышают объем производства, а в другие - производство превышает спрос. Требуется сбалансировать объемы производства и потребления, минимально нарушая при этом заданные объемы и дни поставок. Рассмотрим пример. Пусть за декаду поставщик обслуживает получателей А, Б, В, Г, Д, заявки которых представлены в таблице 4. По строкам располагаются получатели; по столбцам - дни, пронумерованные от 1 до 10. Величины в клетках — это желаемые размеры поставок. Например, получатель А хотел бы получить по 60 т в 1-й, 4-й, 6-й, 8-й и 10-й дни. В последнем столбце таблицы 4 заданы суммарные потребности получателей по всем дням.

Таблица 4

Получатели	Дни										Потребность в грузе, т
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
А	60			60		60		60		60	300
Б	60			40	40		30	30			200
В	40				30				30		100
Г	50			50				50			150
Д	50		50		50		50		50		250
Потребность в грузе по дням, т	260	0	50	150	120	60	80	140	80	60	1000
Разность потребления и производства, т	160	-100	-50	50	20	-40	-20	40	-20	-40	

За декаду поставщик должен отгрузить 1000 т груза, что в пересчете на день составляет 100 т. В предпоследней строке таблицы 4 дана сумма потребностей всех получателей по дням. Из нее видно, как колеблются величины поставок. Например, в первый день заказано 260 т, а во второй 0.

Будем передвигать поставки и изменять при необходимости их величины таким образом, чтобы обеспечить равномерную работу поставщика. При этом постараемся обойтись минимальным количеством сдвигов. Попробуем двигаться от последнего дня к первому (от последнего столбца к первому).

Т а б л и ц а 5

Получатели	Дни										Потребность в грузе
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
А	60			60		$0 \xrightarrow{60} 60$		$0 \xrightarrow{60} 60$		60	300
Б	$0 \xrightarrow{60} 60$			$0 \xrightarrow{40} 80$		$20 \xleftarrow{20} 10$		30			200
В	40				$0 \xrightarrow{30} 30$				$0 \xrightarrow{30} 30$		100
Г	$0 \xrightarrow{50} 50$			$30 \xrightarrow{20} 20$				50			150
Д	$0 \xrightarrow{50} 50$		$40 \xrightarrow{10} 10$		$0 \xrightarrow{50} 50$		$30 \xrightarrow{20} 20$		$40 \xrightarrow{10} 10$		250

В десятом столбце есть только одна загруженная клетка в 60 ед. Чтобы добавить в этот столбец недостающие 40 единиц груза, необходимо обратиться к предыдущему девятому столбцу. Перенесем загрузку из клеток (В, 9) и (Д, 9) соответственно в (В, 10) и (Д, 10). У получателя В передвинем всю поставку, а у Д — только 10 ед. В таблице 5 стрелкой показана передвижка.

Над стрелкой записывается передвигаемая величина. В девятом и десятом столбцах корректируются объемы поставок. Теперь в десятом столбце сумма поставок равна 100.

Переходим к девятому столбцу. Там осталось 40 ед., добавим 60 из клетки (А, 8). В восьмом столбце стало 80 единиц. Необходимые 20 единиц груза перенесем из клетки (Д, 7). В седьмой столбец перенесем 60 ед. из клетки (А, 6). Теперь в нем оказался избыток в 20 ед., отдадим их в шестой столбец клетке (Б, 6). Продолжим описанные действия над оставшимися столбцами. В таблице 5 представлено окончательное распределение.

Будем считать мерой нарушения первоначального графика произведение переносимой величины на количество дней переноса. Так, например, перенос поставки получателя Б с 1-го дня на 3-й (таблица 5) привел к нарушению графика на 60*2=120 ед. Подсчитаем суммарное нарушение графика для каждого получателя. Для этого числа над стрелками умножим на соответствующие величины сдвигов по столбцам и полученные произведения сложим: получатель А 60*1+ 60*1 = 120; получатель Б 60*2 + 40*1 + 20*1 = 180; получатель В 30*1 + 30*1 = 60; получатель Г 50*1 + 20*1 = 70; получатель Д50*1 +10*1+50*1+20*1 + 10*1 = 140.

Суммарное отклонение по всем получателям составляет 570 ед. Покажем способ, благодаря которому эту величину можно уменьшить.

Запишем в последней строке таблицы 4 разность между суммой поставок по столбцу и объемом производства в день. Так, для первого столбца эта величина равна 160 (260-100); для второго - 100(0-100) и т.д.

Попробуем перераспределить поставки решением транспортной задачи линейного программирования (таблица 6). Будем считать поставщиками столбцы с избытком величин поставок над производством (это столбцы 1, 4, 5, 8), а получателями — столбцы с их недостатком (столбцы 2, 3, 6, 7, 9, 10).

Т а б л и ц а 6

Получатели	Поставщики				Потребность в грузе, т
	1	4	5	8	
2	1 100	2	3	6	100
3	2 50	1	2	5	50
6	5 10	2 10	1 20	2	40
7	6	3 20	2	1	20
9	8	5 20	4	1	20

10	9	6	5	2 40	40
Наличие груза, т	160	50	20	40	270

Объемы производства и потребления берутся из последней строки таблицы 4. Для получателей эти величины берутся со знаком « + ». В клетки вместо расстояний перевозок запишем величину сдвига поставки (разность между номерами столбцов).

Т а б л и ц а 7

Получатели	Дни										Потребность в грузе, т
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
А	60			40		60	20	60		60	300
Б	10		50	20	20	20	30	30	20		200
В	30				30	10			30		100
Г	0	50		40		10		10		40	150
Д	0	50	50		50		50		50		250

Из оптимального решения, представленного в таблице 6, видно, что из первого столбца 100 ед. должно быть передвинуто во второй столбец; 50 ед. - в третий, 10 ед. - в шестой. Отклонение от первоначального графика составит 250 ед. (100*1 + 50*2+10*5). Выпишем отклонения от графика по другим столбцам: четвертый столбец 10*2 + 20*3 + 20*5= 180 ед.; пятый столбец 20*1 =20 ед.; восьмой столбец 40*2 = 80 ед.

Суммарное отклонение составит 530 ед., что на 40 ед. лучше предыдущего решения.

В таблице 7 представлен один из многих вариантов реализации оптимального решения по обеспечению ритмичных поставок от поставщиков определенному количеству потребителей.

Учитывая вышесказанное можно сделать следующие заключения:

- с помощью искусственных преобразований распределительная задача может быть сведена к классическим транспортной задач;
- приведен алгоритм реализации многоэтапной распределительной задачи с оптимизацией по времени.

Литература:

1 *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука,1969.-256с.

2 *Кожин А.П.* Математические методы в планировании и управлении грузовыми перевозками. - М.: Высшая школа, 1991.-296с.

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Орумбаева Н.Т., к.ф.-м.н.;
Мурат Б., магистрант; Орымбетов С.А., магистрант
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан
Orumbayevan@mail.ru

В данной работе рассматривается периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Предлагается метод нахождения приближенного решения периодической краевой задачи. Установлены условия однозначной разрешимости исследуемой задачи.

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad \overline{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T], \qquad (1)$$