УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Б.И.Ескараева, М.А.Темирбеков

Международный казахско-турецкий университет им. К.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Дискретный пограничный слой в случае нулевых точек спектра для систем интегро-дифференциальных уравнений

В статье описан алгоритм построения приближенных решений для систем интегро-дифференциальных уравнений при наличии нулевых точек спектра предельного оператора в дискретных точках рассматриваемого отрезка времени. Для изучения пограничного слоя в окрестности особой точки исходная обыкновенная система интегро-дифференциальных уравнений сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Доказаны теоремы существования, единственности решений итерационных систем, а также асимптотической сходимости формальных решений и сходимости построенного приближенного решения к решению предельной системы.

Ключевые слова: пограничный слой, малый параметр, спектр, предельный оператор, регуляризация, интегральный оператор, асимптотическое решение.

Введение

Наличие особой точки в возмущенных уравнениях, или — по другой терминологии — в дифференциальных уравнениях с малым параметром при производной, порождает базис сингулярностей, описывающий неравномерный переход от «течения» в зоне пограничного слоя к «течению основного потока» [1]. Этот термин представляется нам естественным, так как если сингулярно возмущенное уравнение разрешить относительно производной, то коэффициенты будут иметь полюс первого порядка по малому параметру, как и в случае регулярной особой точки. Установлено, что описание сингулярной зависимости решения от малого параметра связано со свойствами спектра предельного оператора $A(t)$ (см. уравнение (1)) или со свойствами корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению, и, следовательно, в каждой задаче мы должны выделить базис сингулярностей.

В последнее время при описании математической теории пограничного слоя появились понятия дискретного и континуального пограничных слоев. Пограничный слой называется дискретным, если его базис сингулярностей является конечным или счетным [2]. В настоящей работе рассматривается дискретный пограничный слой, в случае тождественной необратимости предельного оператора и наличия дополнительной сингулярности, порождаемой интегральным оператором.

Рассматривается сингулярно возмущенная интегро-дифференциальная система

$$\varepsilon\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt}=A(t)y+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+h(t),\ \ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

где $A(t)$, $K(t,s)$ — матрицы-функции размерности $(n\times n)$; $h(t)=\{h_1,...,h_n\}$ — известная вектор–функция; $y^0\in\mathbb{C}^n$ — постоянный вектор; $\mu(t)\in C^\infty[0,T]$ — скалярная функция, при следующих предположениях:

1) $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$, $h(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$, $K(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы-функции $A(t)$ удовлетворяют требованиям:

а) $\lambda_i(t)\ne 0,\ \lambda_i(t)\ne\lambda_j(t),\ i,j=\overline{1,p},\ p<n;$

б) $\lambda_i(t)\equiv 0,\ i=\overline{p+1,n};$

в) $Re\lambda_j(t)\le 0,\ j=\overline{1,p};$

3) $\lambda_m(t)\equiv\mu(t)\in C^\infty([0,\mathrm{T}],\mathbb{R}^1),\ \lambda_m(t)\ne\lambda_j(t),\ j=\overline{1,n},\ \forall t\in[0,T].$

Предположим, что вырожденная система

$$0=A(t)\bar{y}+h(t) \tag{2}$$

имеет решение. В этом случае правая часть $h(t)$ этой системы должна быть ортогональной ядру оператора $A^*(t)$, т.е.

$$\langle h(t), d_i(t)\rangle \equiv 0, \quad i=\overline{p+1,n}, \quad \forall t\in[0,T]. \tag{3}$$

Решение вырожденной системы (2), зависящее от $n-p$ произвольных скалярных функций $\alpha_i(t)$, определенных на отрезке $[0, T]$, запишем в виде

$$\overline{y}=\varphi(t)\equiv \alpha_{p+1}(t)c_{p+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)c_n(t)+\tilde{y}_0(t), \tag{4}$$

где $\tilde{y}_0(t)$ — частное решение системы (2), отвечающее правой части $h(t)$.

Регуляризация задачи

Согласно методике [3] введем регуляризирующие функции

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ \ j=\overline{1,p},\ \ \tau_m=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_m(t)}{\varepsilon},$$

и для функции $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}}\equiv y(t,\varepsilon)$ ставим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+L_0\tilde{y}-\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=h(t),\ \ \tilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0. \tag{5}$$

Здесь $D_\lambda\equiv\lambda_1(t)\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\lambda_p(t)\frac{\partial}{\partial\tau_p}+\lambda_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau_m}$, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p,\tau_m)$, $\psi=(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_p,\psi_m)$, а оператор $\tilde{I}$ имеет вид

$$J\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Jz_k(t,\tau)\equiv\left(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0,r-s\geq 0}^{r}R_{r-s}z_s(t,\tau)\right)_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}},$$

где операторы порядка R_m действуют на каждую функцию

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\sum_{j=1}^{m}y_j(t)e^{\tau_j}$$

с коэффициентами $y_j(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$, $j=\overline{0,m}$, пространства U по закону:

$$R_0y(t,\tau)=e^{\tau_m}\int_0^t K(t,s)y_m(s)ds,$$

$$R_{\nu+1}y(t,\tau)=(-1)^\nu\cdot\left[\left(I_0^\nu\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=t}\cdot e^{\tau_j}-\left(I_0^\nu\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=0}\cdot e^{\tau_m}+\left(I_j^\nu\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=t}\cdot e^{\tau_j}-\left(I_j^\nu\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=0}\cdot e^{\tau_m}\right],$$

$$(\tau=\varepsilon^{-1}\psi(t),\ \nu\geq 1),$$

а операторы I_j^ν имеют вид

$$I_0^0=\frac{1}{-\mu(s)},\ I_0^\nu=\frac{1}{-\mu(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_0^{\nu-1};$$

$$I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)-\mu(s)},\ I_j^\nu=\frac{1}{\lambda_j(s)-\mu(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1},\ \nu\geq 1,\ \ j=\overline{1,p}.$$

Хотя расширение оператора $\tilde{I}$ построено формально, им вполне можно пользоваться для вычисления асимптотического решения $y_{\varepsilon N}(t)$ задачи (1) конечного порядка $N<\infty$.

Пусть дан ряд

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau) \tag{6}$$

с коэффициентами $y_k(t,\tau)\in C^\infty([0,1],\mathbb{C}^n)$.

Теория разрешимости итерационных задач

Подставим ряд (6) в систему (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим итерационные задачи

$$L_0y_0 - R_0y_0 = h(t),\ y_0(0,0) = y^0; \qquad (7_0)$$

$$L_0y_1 - R_0y_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + R_1y_0,\ y_1(0,0) = 0; \qquad (7_1)$$

$$L_0y_k - R_0y_k = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + \sum_{s=0}^{k-1} R_{k-s}y_s,\ \ y_k(0,0) = 0. \qquad (7_k)$$

Каждая из итерационных задач имеет вид

$$(L_0 - R_0)y(t,\tau) = h(t,\tau),\ y(0,0) = y^0, \qquad (8)$$

где $h(t,\tau)$ — соответствующая правая часть.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2а), 2в), 3), (3) и правая часть системы (8) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости этой системы в U необходимо и достаточно, чтобы

$$< h(t,\tau), \nu_k(t,\tau) >\equiv 0;\ k = \overline{1,n};\ \forall t \in [0,T], \qquad (9)$$

где $\nu_k(t,\tau) = d_k(t)e^{\tau_k}$, $k = \overline{1,n}$ — базис ядра сопряженного оператора $L^* \equiv D_{\bar\lambda} - A^*(t)$, причем $\nu_j(t,\tau) = d_j(t)e^{\tau_j}$, $j = \overline{1,p}$, $\nu_i(t,\tau) = d_i(t)$, $i = \overline{p+1,n}$.

Доказательство. Пусть $h(t) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{m} h_k(t)e^{\tau_k}$. Решение системы (8) ищем в виде

$$y(t,\tau) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{m} y_k(t)e^{\tau_k}. \qquad (10)$$

Подставим (10) в (8) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах и свободные члены, будем иметь:

$$-A(t)y_0(t) = h_0(t); \qquad (11)$$

$$\left[\lambda_k(t)I - A(t)\right]y_k(t) = h_k(t), \quad k = \overline{1,n}; \qquad (12)$$

$$\left[\lambda_m(t)I - A(t)\right]y_m(t) - \int_0^t K(t,s)y_m(s)ds = h_m(t). \qquad (13)$$

Рассмотрим задачу (13). Так как $\lambda_m(t) \neq \lambda_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, и $det\left(\lambda_m(t)I - A(t)\right) \neq 0$, то она представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $\left[\lambda_m(t)I - A(t)\right]^{-1} K(t,s)$ и свободным членом $\left[\lambda_m(t)I - A(t)\right]^{-1} h_m(t)$. Известно, что такое уравнение однозначно разрешимо в классе U, т.е.

$$y_m(t) = \left[\lambda_m(t)I - A(t)\right]^{-1} h_m(t) + \int_0^t R_m(t,s)\left[\lambda_m(s)I - A(s)\right]^{-1} h_m(s)ds,$$

где $R_m(t,s)$ — резольвента ядра $\left[\lambda_m(t)I - A(t)\right]^{-1} h_m(t)$.

Для вычисления решения системы (12) сделаем в ней преобразование:

$$y_k(t) = C(t)\xi(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t)c_k(t), \qquad (14)$$

где $\xi = \{\xi_1,...,\xi_n\}$ — новый неизвестный вектор; $C(t) = (c_1,...,c_n)$ — матрица из столбцов c_k, являющихся собственными векторами оператора $A(t)$. Подставляя (14) в (12), будем иметь

$$\left[\lambda_k(t)I - A(t)\right]C(t)\xi(t) = h_k(t).$$

Умножая слева это равенство на матрицу $C^{-1}(t)$ и учитывая, что $C^{-1}(t)A(t)C(t) = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$, получим

$$\left[\lambda_k(t)I - \Lambda(t)\right]\xi = C^{-1}h_k(t). \qquad (15)$$

Учитывая, что $\lambda_i(t) = 0$, $i = \overline{p+1,n}$, и $C^{-1}(t)h_k(t) = \{< h_k, d_1 >,...,< h_k, d_n >\}$, запишем (15) покомпонентно в виде

$$\left(\lambda_k(t) - \lambda_1(t)\right)\xi_1(t) =< h_k(t), d_1(t) >;$$

$$
\begin{gathered}
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\left(\lambda_k(t)-\lambda_{k-1}(t)\right)\xi_{k-1}(t)=<h_k(t),d_{k-1}(t)>; \\
0\cdot\xi_k(t)=<h_k(t),d_k(t)>; \\
\left(\lambda_k(t)-\lambda_{k+1}(t)\right)\xi_{k+1}(t)=<h_k(t),d_{k+1}(t)>; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\left(\lambda_k(t)-\lambda_p(t)\right)\xi_p(t)=<h_k(t),d_p(t)>; \\
\lambda_k(t)\xi_{p+1}(t)=<h_k(t),d_{p+1}(t)>; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\lambda_k(t)\xi_n(t)=<h_k(t),d_n(t)>.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Последние $(n-p)$ компоненты системы (16) однозначно разрешимы в классе $C^\infty[0,T]$, т.е.

$$y_i(t)=C(t)\xi_i(t)\equiv\sum_{i=p+1}^{n}\frac{<h_k(t),d_i(t)>}{\lambda_k(t)}\cdot c_i(t).$$

Первые p компоненты системы (16) разрешимы в классе $C^\infty[0,T]$ тогда и только тогда, когда $\left\langle h_k(t),d_j(t)\right\rangle\equiv 0,\quad j=\overline{1,p},$ что совпадает с условием (9). При этом она имеет решение

$$y_j(t)=\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j(t)c_j(t)+\sum_{k=1,k\neq j}^{p}\frac{<h_k(t),d_j(t)>}{\lambda_k(t)-\lambda_j(t)}\cdot c_j(t)\right],$$

где $\alpha_j(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, $j=\overline{1,p}$. Теорема доказана.

Замечание 1. При выполнении условия ортогональности (9) система (8) имеет решение (10), представимое в виде

$$
\begin{aligned}
y(t,\tau)=\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j(t)c_j(t)+\sum_{s=1,s\neq j}^{p}\frac{<h_j(t),d_s(t)>}{\lambda_j(t)-\lambda_s(t)}\cdot c_s(t)\right]\cdot e^{\tau_j}+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i(t)c_i(t)+ \\
+\left\{\left[\lambda_m(t)I-A(t)\right]^{-1}h_m(t)+\int_0^t R_m(t,s)\left[\lambda_m(s)I-A(s)\right]^{-1}h_m(s)\right\}\cdot e^{\tau_m},
\end{aligned} \tag{17}
$$

где $\alpha_j(t)$ — произвольные функции из класса $C^\infty[0,T]$, $j=\overline{1,p}$;

$$\alpha_i(t)=\frac{<h_k(t),d_i(t)>}{\lambda_k(t)},\quad i=\overline{p+1,n}.$$

Перейдем теперь к изучению однозначной разрешимости системы (8).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и правая часть $h(t,\tau)\in U$ системы (8) удовлетворяет условиям ортогональности (9). Тогда система (8) при

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t}+R_1 y+Q(t,\tau),\nu_k(t,\tau)\right\rangle\equiv 0,\quad k=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где $Q(t,\tau)$ — известная функция, имеет единственное решение в пространстве U.

Доказательство. Так как выполнены условия (9), то система (8) имеет решение (10), в пространстве U представимое в виде (17), где $\alpha_j(t),\ j=\overline{1,p},$ пока не определены. Подчиняя (17) начальным условиям $y(0,0)=y^0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j(0)\cdot c_j(0)+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i(0)\cdot c_i(0)=y^0-y_0(0,0).$$

Умножая это равенство скалярно на $d_k(t),\ k=\overline{1,n},$ вычислим значения $\alpha_j(0)$:

$$\alpha_j(0)=<y^0,d_k(0)>-<y_0(0,0),d_k(0)>-<\alpha_i(0),d_k(0)>,\quad k=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Подчиним (19) условию (18). Для этого вычислим

$$-\frac{\partial y}{\partial t}+R_1 y+Q(t,\tau)\equiv-\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_j(t)c_j(t)\right)^{\bullet}e^{\tau_j}+\sum_{i=p+1}^{n}\left(\alpha_i(t)c_i(t)\right)^{\bullet}+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{K(t,t)y_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_m(t)}\cdot e^{\tau_j}-\frac{K(t,0)y_j(0)}{\lambda_j(0)-\lambda_m(0)}\cdot e^{\tau_m}\right]+\frac{K(t,t)y_0(t)}{\lambda_m(t)}-\frac{K(t,0)y_0(0)}{\lambda_m(0)}\cdot e^{\tau_m}+Q(t,\tau).$$

Тогда условия (18) примут вид:

$$\left\langle -(\alpha_j(t)c_j(t))^{\bullet}-\frac{K(t,t)c_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_m(t)}\cdot\alpha_j(t)-(\alpha_j(t)c_j(t))^{\bullet}+\psi_j(t,\tau),d_k(t)\right\rangle\equiv 0,\quad k=\overline{p+1,n},$$

или

$$-\dot{\alpha}_j(t)-\left(\dot{c}_j(t)+\frac{K(t,t)c_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_m(t)}d_k(t)\right)\alpha_j(t)+<\psi_j(t,\tau),d_k(t)>\equiv 0,\ j=\overline{1,p},\ k=\overline{p+1,n}.$$

Присоединяя к этим уравнениям начальные условия (19), находим однозначно функции $\alpha_j(t)$:

$$\alpha_j(t)=e^{\int_0^t G_j(s)ds}\left[<y^0,d_k(0)>-<y_0(0,0),d_k(0)>\int_0^t e^{-\int_0^s G_j(\theta)d\theta}<\psi_j(s,\theta),d_i(s)>ds\right],$$

где обозначено $G_j(t)=-<\dot{c}_j(t),d_i(t)>+\sum_{j=1}^{p}\frac{<K(t,t)c_j(t),d_i(t)>}{\lambda_j(t)-\lambda_m(t)},\ i=\overline{p+1,n}.$ Теорема доказана.

Асимптотический характер формальных решений

Построив решения $y_0(t,\tau),\ldots,y_N(t,\tau)$ задач $(7_0),(7_1),\ldots,(7_N)$ в пространстве U, составим частичную сумму

$$S_n(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t,\tau).$$

Обозначим сужение этой суммы при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$ через $y_{\varepsilon N}(t)$.

Имеет место следующее утверждение [2].

Лемма 1. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Тогда функция $y_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{N+1}, т.е.

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}=A(t)y_{\varepsilon N}(t)+\int_0^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_{\varepsilon N}(s,\varepsilon)ds+h(t)+\varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon),\ \ y_{\varepsilon N}(0)=y^0, \qquad (20)$$

где $\|R(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\le\bar{R},\ \ \bar{R}>0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \varepsilon_0$ достаточно мало.

Используя эту лемму, можно показать, что ряд (6), взятый на сужении $\tau=\psi(t)/\varepsilon$, является асимптотическим при $\varepsilon\to+0$. Перейдем к доказательству этого факта.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–3). Тогда для достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ исходная задача (1) имеет в классе $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ единственное решение $y(t,\varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\le C_N\varepsilon^{N+1}\qquad (N=0,1,...), \qquad (21)$$

где постоянная $C_N>0$ не зависит от ε при $(0,\varepsilon_0]$.

Доказательство. Согласно лемме 1 функция $y_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче (20), а функция $y(t,\varepsilon)$ — задаче (1). Для невязки $\Delta_N(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)$ получаем задачу

$$\varepsilon\frac{d\Delta_N}{dt}=A(t)\Delta_N+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\Delta_N(s)ds-\varepsilon^{N+1}R_N(t,\varepsilon),\ \ \Delta_N(0,\varepsilon)=0. \qquad (22)$$

Для получения асимптотической оценки рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}=A(t)z+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)z(s,\varepsilon)ds+\Phi(t,\varepsilon),\ \ z(0,\varepsilon)=0, \qquad (23)$$

и попытаемся оценить его решение $z(t,\varepsilon)$ через норму неоднородности $\Phi(t,\varepsilon)$.

Введем дополнительную функцию

$$\nu = \int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta \right) K(t,s)z(s,\varepsilon)ds.$$

Дифференцируя ее по t, будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = K(t,t)z(t,\varepsilon) + \int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta \right)\frac{\mu(t)}{\varepsilon} K(t,s)z\left(s,\varepsilon\right)ds +$$

$$+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta \right)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} z\left(s,\varepsilon\right)ds$$

или

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = \mu(t)v + \varepsilon K(t,t)z(s,\varepsilon) + \varepsilon\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta \right)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} z\left(s,\varepsilon\right)ds.$$

Итак, для вектора $w = \{z,v\}$ получим систему

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 1 \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t,t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon\begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta \right)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} v(s,\varepsilon)ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi(t,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0,\varepsilon) = v(0,\varepsilon) = 0. \tag{24}$$

Матрица $B(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}$ является матрицей простой структуры, так как $\lambda_j(t) \neq \mu(t), \quad \forall t \in [0,T]$.

Действительно, существует матрица $T(t) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ такая, что $T^{-1}(t)A(t)T(t) = diag(\lambda_j(t), \mu(t))$.

Следовательно, дифференциальная система $\varepsilon\frac{dw}{dt} = B(t)w$ имеет равномерно ограниченную фундаментальную матрицу решений $Y(t,s,\varepsilon)$, ($Y(s,s,\varepsilon) = I$, $0 \le s \le t \le T$), т.е.

$$\left\| Y(t,s,\varepsilon) \right\| \le c_0 = const, \quad 0 \le s \le t \le T, \quad \varepsilon > 0$$

(см., например, [2]).

Запишем теперь интегральную систему, эквивалентную системе (23):

$$w(t,\varepsilon) = \int_0^t Y(t,s,\varepsilon)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t,s) & 0 \end{pmatrix} w(s,\varepsilon)ds +$$

$$+\int_0^t Y(t,\eta,\varepsilon)\begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^\eta exp\left(\varepsilon^{-1}\mu(\theta)d\theta\right)\frac{\partial K(\eta,s)}{\partial \eta} z(s,\varepsilon)ds \end{pmatrix} d\eta + \varepsilon^{-1}\int_0^t Y(t,s,\varepsilon)\begin{pmatrix} \Phi(s,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

Это интегральное уравнение имеет единственное решение $w(t,\varepsilon)$ при каждом $\varepsilon > 0$ (в силу непрерывности ее ядра). Подставим сюда решение $w = w(t,\varepsilon)$ и в полученном тождестве перейдем к нормам. Учитывая равномерную ограниченность матрицы $Y(t,s,\varepsilon)$, будем иметь

$$\left\| w(t,\varepsilon) \right\| \le c_1 \cdot \int_0^t \left\| w_1(s,\varepsilon) \right\| ds + c_2 \cdot \int_0^t \left(\int_0^\eta \left\| w_1(s,\varepsilon) \right\| ds \right) d\eta +$$

$$+\frac{c_3}{\varepsilon}\left\| \Phi(t,\varepsilon) \right\|_{C[0,T]} \le c_4 \cdot \int_0^t \left\| w(s,\varepsilon) \right\| ds + \frac{c_3}{\varepsilon}\left\| \Phi(t,\varepsilon) \right\|_{C[0,T]}.$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана [4], получим оценку

$$\left\| w(t,\varepsilon) \right\| \le \frac{c_3}{\varepsilon}\left\| \Phi(t,\varepsilon) \right\|_{C[0,T]} \cdot e^{c_4 t} \le \frac{c_5}{\varepsilon}\left\| \Phi(t,\varepsilon) \right\|_{C[0,T]}.$$

Учитывая, что $\|z(t,\varepsilon)\| \le \|w(t,\varepsilon)\|$, выводим отсюда оценку для решения $z(t,\varepsilon)$ интегро-дифференциальной задачи (23):

$$\|z(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \le \frac{\nu}{\varepsilon}\|\Phi(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}, \tag{25}$$

где $\nu > 0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Задача (22) в точности совпадает с задачей (23), где $\Phi(t,\varepsilon) \equiv -\varepsilon^{N+1}R_N(t,\varepsilon)$. Используя оценку (25), получаем, что

$$\|\Delta_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \le \varepsilon^N \|R_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \le \varepsilon^N \overline{R}_N.$$

Для невязки $\Delta_{N+1}(t,\varepsilon) = \Delta_N(t,\varepsilon) - \varepsilon^{N+1}y_{N+1}(t, y_{\varepsilon N}(t,\varepsilon))$ получаем оценку

$$\varepsilon^{N+1}\overline{R}_{N+1} \ge \|\Delta_{N+1}(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \ge \|\Delta_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} - \varepsilon^{N+1}\|y_{N+1}(t,\varepsilon^{-1}\psi(t))\|_{C[0,T]},$$

откуда выводим, что

$$\|\Delta_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \le \varepsilon^{N+1} \cdot c_N,$$

где $c_N = \overline{R}_{N+1} + \|y_{N+1}(t,\varepsilon^{-1}\psi(t))\|_{C[0,T]}$. Теорема доказана.

В конце приведем обоснование утверждения относительно решения предельной системы (5).

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теорем 1–3, $Re\lambda_j(t) < 0$, $j = \overline{1,p}$. Тогда задача (1) имеет на отрезке $[0,T]$ решение $y(t,\varepsilon)$, для которого имеет место предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|y(t,\varepsilon) - \varphi(t)\|_{C[\rho,T]} = 0, \tag{26}$$

где $\varphi(t)$ — функция (4), а ρ — произвольное число из интервала $(0,T)$.

Доказательство. Поскольку выполнены условия теорем 1–3, нулевой член асимптотики

$$y_{0\varepsilon}(t) \equiv \varphi(t) + \alpha_1(t)e^{\varphi_1(t,\varepsilon)} + \ldots + \alpha_\rho(t)e^{\varphi_\rho(t,\varepsilon)}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{0\varepsilon}(t)\|_{C[0,T]} \le c \cdot \varepsilon. \tag{27}$$

Функции $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_p(t)$ определяются из задач (7_0), (7_1),…,(7_k), которые по предположению теорем 1 и 2 разрешимы в классе $C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$. Отсюда следует, что

$$\|\alpha_i(t)\|_{C[0,T]} \le M_j, \; j = \overline{1,p}.$$

Поэтому из (27) получаем

$$\|y(t,\varepsilon) - \varphi(t)\|_{C[\rho,T]} \le c \cdot \varepsilon + M_1 e^{-\frac{xt}{\varepsilon}} + \ldots + M_p e^{-\frac{xt}{\varepsilon}} \le c \cdot \varepsilon + (M_1 + \ldots + M_p)e^{-\frac{xt}{\varepsilon}},$$

где $\chi > 0$ таково, что $-Re\lambda_j(t)$, $\forall t \in [0,T]$, $j = \overline{1,p}$. Из этого неравенства следует предельное соотношение (26). Теорема доказана.

Список литературы

1 *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegnen bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. des III Intern. mathem. Kongress. — Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905. — P. 484–491.

2 *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — 456 с.

3 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

4 *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

Б.Т.Қалымбетов, Б.И.Есқараева, М.А.Темірбеков

Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін спектрі нолдік жағдайдағы дискретті шекаралық қабаты

Мақалада берілген уақыт мезетіндегі шектік оператордың спектрінің дискреттік нүктелерінде нолдік нүктелері бар болған интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін жуықтама шешімді құрудың алгоритмі жазылған. Ерекше нүктенінің аймағындағы шекаралық қабатты зерттеу үшін, бастапқы жай интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі дербес туындылы интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтірілген. Итерациялық есептердің шешімінің бар болуы және жалғыздығы, сонымен бірге формалды шешімнің асимптотикалық жинақтылығы және құрылған жуық шешімнің шектік жүйе шешіміне жинақтылығы дәлелденген.

B.T.Kalimbetov, B.I.Yeskarayeva, M.A.Temirbekov

Discrete boundary layer for systems of integro-differential equations with zero points of spectrum

In this article we considered algorithm for constructing approximate solutions for systems of integro-differential equations with zero points of spectrum of the limit operator at discrete points of the segment time. To study the boundary layer in the neighborhood of a singular point, the original system of ordinary integro-differential equations is reduced to a system of integro-differential equations with partial derivatives of first order. We present proofs of theorems of normal and unique solvability of iteration systems, asymptotic convergence of formal solutions and convergence of approximate solutions to the solution of the limit system.

References

1 Prandtl L. *Verhandl. des III Intern. mathem. Kongress*, Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905, p. 484–491.
2 Lomov S.A., Lomov I.S. *Fundamentals of mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: Publ. MSU, 2011, p. 456.
3 Lomov S.A. *Introduction to general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, 400 p.
4 Hartman F. *Ordinary differential equations*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.