

$$\begin{cases} -\Delta_y v = 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_y} + b(x, y)v = b(x, y), & y \in \partial G_0, \\ v \rightarrow 0, & |y| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence(RI):Am. Math. Soc.– 2002.– P.363.
2. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Attractors and a “strange term” in homogenized equation. CR Me’canique. –2020. –V. 348, №5. – P.351–359.
3. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reaction–Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms. Communications on Pure and Applied Analysis. –2020. – V. 19, №5. – P.2419–2443.
4. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.“Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. Chaos, Solutions & Fractals. –2020. –V. 140, Art. № 110208.

ШЕТТІК ШАРТТАРЫНДА ТЕЗ ӨЗГЕРЕТІН МҮШЕЛЕРІ БАР ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОБЛЫСТАНАВЬЕ-СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУЫ

Бекмаганбетов К.А.¹, Төлеубай А.М.², Чечкин Г.А.³

¹М.В.Ломоносов атындағы ММУ, Қазақстан филиалы, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

²Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

³М.В.Ломоносов атындағы ММУ, Мәскеу қ., Ресей

E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz; altyn.15.94@mail.ru; checkin@mech.math.msu.su

Бұл жұмыста перфорацияланған облыстағы екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы–шектік есептің аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз (облыстың геометриясы туралы [1] қараңыз). Соңғы уақыттарда пайда болған аттракторлардың орташалануына байланысты бірнеше жұмыстарды атап өтеміз ([2],[3] және [4]).

Осы баяндамада перфорацияланған облыстағы екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің \mathcal{A}_ε траекториялық аттракторлары $\varepsilon \rightarrow 0$ жағдайда әлсіз мағынада тиісті функционалды кеңістіктерінде орташаланған теңдеулер жүйесінің \mathcal{A} траекториялық аттракторына жинақталатындығы көрсетіледі ([5], [6]). Мұнда кіші параметр ε перфорацияланған ортадағы қуыстардың диаметрін олардың арасындағы қашықтықты сипаттайды.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ -гі шектелген облыс және $\partial\Omega$ – шекарасы тегіс болсын. $G_0 \subset Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – облыс болсын, тиесілі \bar{G}_0 шарға диффеоморфты компакт болып табылатындай.

$\delta > 0$ және M – кез келген жиын болсын, біз келесі белгілеулерді енгіземіз: $\delta M = \{x: \delta^{-1}x \in M\}$. $j \in \mathbb{Z}^2$ үшін келесі жиындарды анықтаймыз

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon G_0.$$

Әрі қарай, $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{2}\varepsilon\}$ облысын және $\gamma_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^2: G_\varepsilon^j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \emptyset\}$ рұқсат етілген индекстер жинағын анықтаймыз.

Назар аударыңыз, $|\gamma_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-2}$ мұнда, $d > 0$ – тұрақты. Келесі облысты қарастырайық, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{G}_\varepsilon$, $G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \gamma_\varepsilon} G_\varepsilon^j$.

Кеңістіктер үшін келесі белгілеулерді енгіземіз: $\mathbf{H} := [L_2(\Omega)]^2$, $\mathbf{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^2$, $\mathbf{V} := [H_0^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^2 - [H^1(\Omega)]^2$ -гі $\partial\Omega$ шекарасында іздері нөлге тең вектор-функциялар жиыны. Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

$$\|v\|^2 := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_\varepsilon^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx.$$

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екіөлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon = g(x, \frac{x}{\varepsilon}), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + B(\frac{x}{\varepsilon}) u_\varepsilon = 0, & x \in \partial G_\varepsilon, t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

мұнда $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $g = g(x, y) = (g^1, g^2) \in [L_2(\Omega \times \mathbb{R}^2)]^2$, n -шекараның сыртқы нормаль векторы және $\nu > 0$, $B(s) = \begin{pmatrix} b^1(s) & 0 \\ 0 & b^2(s) \end{pmatrix}$, $b^k(s) \in C(\mathbb{R}^2)$, $b^k(s)$ – әрбір айнымалы үшін 1-периодты және $\int_{\partial G_0} b^k(s) d\sigma = 0$ шартын қанағаттандыратын функция ($k = 1, 2$), мұнда $d\sigma$ – қисық ұзындығының элементі.

Орташаланған (шектік) есеп келесі түрде болады:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \sum_{i,l=1}^2 \hat{a}_{il} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + (u_0, \nabla) u_0 + V u_0 = \bar{g}(x), & x \in \Omega, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \quad (2)$$

мұнда

$$\hat{a}_{il} = \int_{Y \setminus G_0} \left(\frac{\partial N_l(\xi)}{\partial \xi_i} + \delta_{il} \right) d\xi, \quad \bar{g}(x) = \int_{Y \setminus G_0} g(x, \xi) d\xi,$$

$$m_k = - \int_{\partial G_0} b^k(\xi) M^k(\xi) d\sigma, \quad V = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

$N_l(\xi)$ және $M^k(\xi)$ – 1-периодтық, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең және төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

$$\Delta M^k = 0, \quad \xi \in Y \setminus G_0, \quad \frac{\partial M^k}{\partial n} = -b^k(\zeta), \quad \xi \in \partial G_0,$$

$$\Delta N_l = 0, \quad \xi \in Y \setminus G_0, \quad \xi \in Y \setminus G_0, \quad \frac{\partial N_l}{\partial n} = -n_l, \quad \xi \in \partial G_0.$$

V кеңістігіндегі $\nu \sum_{i,l=1}^2 \hat{a}_{il} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}$ операторының бірінші меншікті мәні λ_0 саны болсын.

Келесідей теореманы аламыз ([7] қараңыз).

Теорема 1. Айталық $\lambda_0 > \max\{m_1, m_2\}$, онда $\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v: \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \right\}$ кеңістігінде $\varepsilon \rightarrow 0$ үшін келесі шектік қатынас орындалады

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{A},$$

мұнда \mathfrak{A}_ε , \mathfrak{A} – сәйкесінше (1) және (2) есептерінің траекториялық аттракторлары.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием. Матем. сб. –2001. –Т.192, №7. –С. 3–20.
2. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Attractors and a “strange term” in homogenized equation. CR Me’canique. –2020. –V. 348, №5. – P.351–359.
3. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reaction–Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms. Communications on Pure and Applied Analysis. –2020. – V. 19, №5. – P.2419–2443.
4. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. Chaos, Solutions & Fractals. –2020. –V. 140, Art. № 110208.
5. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non–autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems. ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2002. –V.8. –P.467–487.
6. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non–autonomous 2D Navier–Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor. J. Dynam. Diff. Eq. – 2007. –V.19, №3. –P.655–684.
7. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде. Проблемы математического анализа. –2022. –Т.115. – С.15–28.

УСЛОВИЯ КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В $L_1(\mathbb{R})$

Есбаев А.Н., Оспанов К.Н.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

E-mail: adilet.e@gmail.com

В пространстве суммируемых функций $L_1(\mathbb{R})$ рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$-s(x)(\rho(x)y')' + r(x)y' = f(x), \quad (1)$$

где $\rho(x) \in \mathbb{R}$, $\rho(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $s(x)$ — непрерывная функция, $r(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, а $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Определим оператор \tilde{l} на множестве $D(\tilde{l}) = C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\tilde{l}y := -s(x)(\rho(x)y')' + r(x)y'.$$

Через l обозначим замыкание \tilde{l} в норме $L_1(\mathbb{R})$. Решением уравнения (1) назовём элемент $y \in D(l)$ такой, что $ly = f$.

Будем говорить, что решение уравнения (1) является L_1 -максимально регулярным, если выполняется следующая оценка

$$\| -s(\rho y')' \|_{L_1(\mathbb{R})} + \| r y' \|_{L_1(\mathbb{R})} + \| y \|_{L_1(\mathbb{R})} \leq C \| f \|_{L_1(\mathbb{R})},$$

причём постоянная C не зависит от y .

Теорема. Пусть $\rho \geq 1$, $r(x) \geq \max(\rho(x), \sqrt{1+x^2})$, а $s(x) \geq \delta > 0$ — непрерывная и ограниченная функция. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение y и для y выполнена следующая оценка L_1 -максимальной регулярности:

$$\| -s(\rho y')' \|_1 + \| r y' \|_1 + \| y \|_1 \leq C_0 \| f \|_1.$$