

А.Ж.Сейітмұратов¹, Н.Қ.Медеубаев², Б.М.Нұрланова², Ж.Т.Шаукенов²

¹Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті;

²Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: aibekyo@mail.ru)

Қатпарлы пластинканың тербеліс теңдеуін есептеу әдісі

Құрылыс конструкцияларының сейсмөзімділігінің негізгі элементтері болып табылатын берілген механикалық және геометриялық сипаттамалары бойынша екіқабатты пластинканың меншікті тербелісінің жиілік теңдеулері алынды. Ғылымның гидродинамика, геофизика сияқты бөлімдерінде стационарлы, стационарлы емес тербелетін және толқындық процестерді қарастырғанда осы зерттеулердің нәтижелері үлкен пайдасын тигізеді. Есеп декомпозиция әдісінің негізінде жиілік теңдеулерін жуықтау әдісімен шешілген.

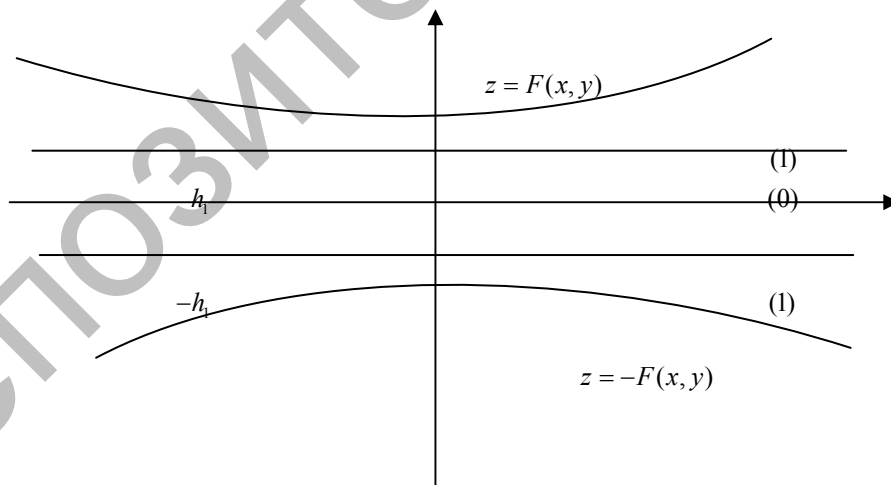
Кілтті сөздер: декомпозиция әдісі, Больцман интегралдық қатынасы, қатпарлы пластинкалар, байламалы-серпімді оператордың ядросы, серпімдік тұрақтылар.

Ғылымның және техниканың дамуы, жаңа құрылыстарды құру ғылыми-техникалық прогресстың жоғарылау деңгейіне жауап беретін, деформацияланатын ортаның және динамика облысында зерттелетін талаптарды қадағалайтын сапалы материалдарды және технологияларды пайдалану болып табылады.

Нақты қолданбалы есептер және механикадағы деформацияланатын қатты дене зерттелуінің даму заңдылығы жарық көруде. Мұның толық есебі үшін материалдардың физикалық-механикалық қасиеті, уақыт бойынша олардың деформацияланатын сипаттамасы, температуралы, электрлі және магнитті жолдардың механикалық деформацияланатын жолдарының өзара байланыс эффектілерінің, денелердің геометриялық тұрғызылуының дамуы болып табылады.

Берілген зерттеудің нәтижесінде стационарлы, стационарлы емес, тербелмелі және толқынды процестердің қарастырылуы, деформацияланатын қатты дененің механикасы, құрылыс механикасы, гидродинамика, геофизика ғылымдарының бөлімдерінде жақсы жетістіктерге алып келді.

Байламалы-серпімді материалдан жасалған шексіз үш қатпарлы пластинка берілсін, оның орташа қалыңдығы $2h_0$, ал жоғарғы және төменгі қалыңдығы сол материалдан тұратын $(h_1 - h_0)$ тең болсын.



Мұндай үш қатпарлы пластинка құрылымның қатпарлы ортасының материалы параметрінің индексін «0» және «1»-мен белгілейміз.

σ және ε тәуелділіктері арасындағы қатпарларда Больцман интегралдық қатынасын пайдаланамыз [1]:

$$\sigma_{ij}^{(l)} = L_i(\varepsilon_{ij}^{(l)}) + 2M_l(\varepsilon_{ij}^{(l)});$$

$$\sigma_{ij}^{(l)} = M_l(\varepsilon_{ij}^{(l)}); \quad (i \neq j, \quad i, j = x, y, z),$$

мұндағы L_l и M_l операторлары келесіге тең болады:

$$\begin{aligned} L_l(\zeta) &= \lambda_l \left[\zeta(t) - \int_0^{t_0} f_{1l}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi \right]; \\ M_l(\zeta) &= \mu_l \left[\zeta(t) - \int_0^{t_0} f_{2l}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

мұнда $f_{kl}(t)$ — байламалы-серпімді операторының ядросы; λ_l, μ_l — серпімдік тұрақтылар.

Потенциалдар енгізуімен $\Phi^{(l)}$ және $\vec{\Psi}^{(l)}$ жанама және көлденең толқындары $\vec{U}^{(l)} = \text{grad}\Phi^{(l)} + \text{rot}\vec{\Psi}^{(l)}$.

Осыған байланысты векторлық потенциал $\vec{\Psi}^{(l)}$ келесі шартты қанағаттандырады:

$$\text{div}\vec{\Psi}^{(l)} = 0,$$

катпарлы материал қозғалысының теңдеуі келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned} N_l(\Delta\Phi^{(l)}) &= \rho_l \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial t^2}; \\ M_l(\Delta\vec{\Psi}^{(l)}) &= \rho_l \frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(l)}}{\partial t^2}; \\ N_l &= L_l + 2M_l. \end{aligned}$$

Шеткері шарттардың түрлендірілуі бойынша біртекті жазықтар бөлімдері жоғарғы және төменгі жазықтардан табылады.

Орта пластинкасының шеткері шарттары келесі түрге ие болады:

$$\sigma_{zz}^{(l)} = f_z^\pm(x, y, t); \quad \sigma_{xz}^{(l)} = f_{xz}^\pm(x, y, t); \quad \sigma_{yz}^{(l)} = f_{yz}^\pm(x, y, t).$$

Сонымен қатар ($z = \pm h_1$) және жоғарғы контактерде

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(l)} &= \sigma_{zz}^{(0)}; \quad \sigma_{xz}^{(l)} = \sigma_{xz}^{(0)}; \quad \sigma_{yz}^{(l)} = \sigma_{yz}^{(0)}; \\ u^{(l)} &= u^{(0)}; \quad v^{(l)} = v^{(0)}; \quad w^{(l)} = w^{(0)}. \end{aligned}$$

Сондай-ақ ($z = \pm h_0$).

Есептегі бастапқы шарттар нөлге тең деп есептейік, яғни

$$\Phi^{(l)} = \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} = \vec{\Psi}^{(l)} = \frac{\partial \vec{\Psi}^{(l)}}{\partial t} = 0; \quad t = 0.$$

Төменде (1) қозғалысы теңдеуінің шешімін жаздық:

$$\begin{aligned} \Phi^{(l)} &= \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{-\cos(kx)} \left\{ dk \int_0^\infty \frac{\sin(qy)}{-\cos(qy)} \right\} dq \int_{(l)} \Phi_0^{(l)} \exp(pt) dp; \\ \Psi_1^{(l)} &= \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{-\cos(kx)} \left\{ dk \int_0^\infty \frac{\cos(qy)}{\sin(qy)} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{10}^{(l)} \exp(pt) dp; \\ \Psi_2^{(l)} &= \int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)} \left\{ dk \int_0^\infty \frac{\sin(qy)}{-\cos(qy)} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{20}^{(l)} \exp(pt) dp; \\ \Psi_3^{(l)} &= \int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)} \left\{ dk \int_0^\infty \frac{\cos(qy)}{\sin(qy)} \right\} dq \int_{(l)} \Psi_{30}^{(l)} \exp(pt) dp. \end{aligned} \quad (2)$$

Егер (2)-ді (1) теңдеуіне қоятын болсақ, $\Phi_0^{(l)}$ және $\Psi_{i0}^{(l)}$ үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{d^2 \Phi_0^{(l)}}{dt^2} - \alpha_l^2 \Phi_0^{(l)} = 0; \quad \frac{d^2 \Psi_{i0}^{(l)}}{dt^2} - \beta_l \Psi_{i0}^{(l)} = 0, \quad (3)$$

мұндағы

$$\alpha_l^2 = k^2 + q^2 + \rho_l p^2 [N_l^{(0)}]^{-1};$$

$$\beta_l^2 = k^2 + q^2 + \rho_l p^2 [M_l^{(0)}]^{-1}.$$

Осыған байланысты $N_l^{(0)}$ және $M_l^{(0)}$ — Лаплас бойынша түрлендірілген операторлар. Жалпы шешімі (3)-теңдеудің келесі түрде құрылады:

$$\Phi_0^{(l)} = A_1^{(l)} ch[\alpha_l(z - z_l)] + A_2^{(l)} sh[\alpha_l(z - z_l)];$$

$$\Psi_{10}^{(l)} = B_{11}^{(l)} sh[\beta_l(z - z_l)] + B_{12}^{(l)} ch[\beta_l(z - z_l)];$$

$$\Psi_{20}^{(l)} = B_{21}^{(l)} sh[\beta_l(z - z_l)] + B_{22}^{(l)} ch[\beta_l(z - z_l)];$$

$$\Psi_{30}^{(l)} = B_{31}^{(l)} ch[\beta_l(z - z_l)] + B_{32}^{(l)} sh[\beta_l(z - z_l)],$$

мұндағы z_l

$$z_0 = 0; \quad z_1 = h_0$$

тең болады. Түрлендірілген ауыстырулар үшін $u_0^{(l)}; v_0^{(l)}; w_0^{(l)}$, (3)-шешімін ала отырып, келесі есептеуді аламыз:

$$u_0^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[k\alpha_l^{2n} A_1^{(l)} - (\beta_l B_{21}^{(l)} + qB_{31}^{(l)}) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} + \left[k\alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} - (\beta_l B_{22}^{(l)} + qB_{32}^{(l)}) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\};$$

$$v_0^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[q\alpha_l^{2n} A_1^{(l)} + (\beta_l B_{11}^{(l)} + kB_{31}^{(l)}) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} + \left[q\alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} - (\beta_l B_{22}^{(l)} + kB_{32}^{(l)}) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\};$$

$$w_0^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_l^{2n+2} A_1^{(l)} + (qB_{11}^{(l)} + kB_{21}^{(l)}) \beta_l^{2n+1} \right] \frac{(z - z_l)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \left[\alpha_l^{2n+1} A_2^{(l)} + (qB_{12}^{(l)} - kB_{22}^{(l)}) \beta_l^{2n} \right] \frac{(z - z_l)^{2n}}{(2n)!} \right\}.$$

Қатпарлы пластинканың тербеліс теңдеулері құрылыс құрылымдарында өте күрделі және де x, y координатасы, t уақыт бойынша кез келген дәрежеден туынды құрайды, сондықтан да қолданбалы есептерді шешуде және де инженерлік есептеулер жүргізу барысында мұндай тәсілдер жарамсыз болып қалады.

Сол себепті қатпарлы пластинка комбинацияланған тербеліс жасайды, мұндай тербелісті сипаттау үшін теңдеу алтыншы ретті болуы қажет.

Егер де тұрақты қалыңдықтағы қатпарлы пластинка тербелісін сипаттайтын негізгі W көлбеу ығысу теңдеуі функциясы үшін

$$A_0 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + A_1 \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial t^2} + A_2 \Delta^2 W + A_3 \frac{\partial^6 W}{\partial t^6} + A_4 \frac{\partial^4 \Delta W}{\partial t^4} + A_5 \frac{\partial^2 \Delta^2 W}{\partial t^2} + A_6 \Delta^3 W = F(x, y, t) \quad (4)$$

болса, A_j және F коэффициенттері [2] жұмыста көрсетілген.

Қатпарлы пластинка тербелісін зерттеу барысында есептеулер уақыт және координата бойынша табылатын функция туындылары негізінде алтыншы ретті гиперболалық типтегі дифференциалдық немесе интегралды дифференциалды теңдеулер шешіміне сәйкес келеді.

Біз (4)-теңдеу шешімін мына түрде іздей аламыз:

$$W(x, y, t) = W_0(x, y) \exp\left(\frac{b_2}{h_2} \varepsilon t\right);$$

$$\left[\frac{\partial^6 v}{\partial \alpha^6} + 3\lambda^2 \frac{\partial^6 v}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + 3\lambda^4 \frac{\partial^6 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + \lambda^6 \frac{\partial^6 v}{\partial \beta^6} \right] + C_0 \lambda_7^2 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^4} \right] + C_1 \lambda_1^4 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right] + C_2 \lambda_1^6 v = 0. \quad (5)$$

Декомпозиция тәсіліне сүйене отырып, үш көмекші есептеулерді қарастырайық [3]:
 №1-есептің шешімін табу:

$$\frac{\partial^6 v_1}{\partial \alpha^6} = f^{(1)}(\alpha, \beta) \quad \frac{\partial^6 v_1}{\partial \alpha^6} = f^{(1)}(\alpha, \beta).$$

№2-есептің шешімін табу:

$$\lambda^6 \frac{\partial^6 v_2}{\partial \beta^6} = f^{(2)}(\alpha, \beta) \quad V_2 = \frac{\partial v_2}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial \beta^2} = 0.$$

№3 (5)-теңдеуінің қалған бөлігін V_3 белгісіз айнымалысына байланысты келесі шарттарды қанағаттандыратындай етіп жазу:

$$3\lambda^2 \frac{\partial^6 v}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + 3\lambda^4 \frac{\partial^6 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + C_0 \lambda_1^2 \left[\frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^4} \right] + C_1 \lambda_1^4 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right] + C_2 \lambda_1^6 v + \beta^{(1)} + f^{(2)} = 0.$$

Декомпозиция тәсіліне сүйене отырып, $v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ деп алсақ, $v_1 = v_2$ шарты орындалуы қажет [4, 5]:

$$f^{(j)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(j)} \sin(\alpha n) \sin(\beta m).$$

Бастапқы екі есептің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$V_1 = f_1(\alpha, \beta) + \frac{\alpha^5}{5!} \varphi_1(\beta) + \frac{\alpha^4}{4!} \varphi_2(\beta) + \frac{\alpha^3}{3!} \varphi_3(\beta) + \frac{\alpha^2}{2!} \varphi_4(\beta) + \alpha \varphi_5(\beta) + \varphi_6(\beta); \quad (6)$$

$$\lambda^6 V_2 = f_2(\alpha, \beta) + \frac{\beta^5}{5!} \psi_1(\beta) + \frac{\beta^4}{4!} \psi_2(\beta) + \frac{\beta^3}{3!} \psi_3(\beta) + \frac{\beta^2}{2!} \psi_4(\beta) + \beta \psi_5(\beta) + \psi_6(\beta).$$

Егер (6) қатар тек қана бірінші қосындымен шектелетін болса, онда $(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$ болғанда $v_1 = v_2$ шарты үшін $a_{11}^{(1)} = \lambda^{-6} a_{11}^{(2)}$ аламыз, мұндағы $V_3 = \frac{1}{2}[V_1 + V_2]$, $(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$ болғандағы жиілік теңдеуі мынаған тең:

$$2\lambda_7^6 \left(1 - \frac{5\pi}{16} \right) C_2 - \lambda_1^4 (1 + \lambda^2) \left(2 - \frac{3}{\pi} - \frac{5\pi}{16} \right) C_1 + \lambda_1^2 \left[(1 + \lambda^4) \left(2 - \frac{24}{\pi^3} - \frac{5\pi}{16} \right) + 4\lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) \right] C_0 - \left[2(1 + \lambda^6) + 3\lambda^2 (1 + \lambda^2) \left(2 - \frac{3}{\pi} - \frac{24}{\pi^3} \right) \right] = 0.$$

References

- 1 Pshenichnov G.I. Decision of some problems of building mechanics a method of decomposition // Building mechanics and calculation of constructions. — 1986. — №4. — P. 12–17.
- 2 Seitmuratov A.Zh. Approximate decomposition method in the theory of vibrations of rectangular plates // News: RK NAS. Series Physics and Mathematics. — 2005. — P. 55–59.
- 3 Filippov I.G., Cheban V.G. Mathematical theory of elastic oscillations and viscoelastic plates and rods. — Chişinău: Shiniitsa, 1988. — P. 190.
- 4 Landau L.D., Lifshitz I. M. Theory of elasticity. — Moscow: Nauka, 1965. — P. 204.
- 5 Filippov A.I. Wave propagation in elastic rod surrounded by type Winkle // Newsletter Msu. Series 1. Mathematics, Mechanics. — 1983. — P. 74–78.

А.Ж.Сейтмуратов, Н.К.Медеубаев, Б.М.Нурланова, Ж.Т.Шаукенов

Метод вычисления уравнения колебания слоистой пластинки

Получены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной пластинки при заданных механических и геометрических характеристиках, являющихся основными элементами сейсмостойкости строительных конструкций. Результаты данных исследований приносят огромную пользу при рассмотрении стационарных, нестационарных колебательных и волновых процессов в таких разделах науки, как гидродинамика, геофизика. Задача решена приближенным методом получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции.

A.Zh.Seytmuratov, N.K.Medeubayev, B.M.Nurlanova, Zh.T.Shaukenov

Method of calculation of the equation of fluctuation of the layered plate

The frequency equations of natural vibrations of the 2-layer plate for given mechanical and geometrical characteristics are obtained, which are the main elements of the seismic stability of building structures. The results of these studies are extremely useful when stationary and non-stationary vibrational wave processes are considered in such branches of science such as fluid dynamics, geophysics. The problem is solved by the method of obtaining the approximate frequency equations based on the decomposition method.

UDC 510.67

S.V.Sudoplatov

*S.L.Sobolev Institute of Mathematics;
Novosibirsk State Technical University, Russia (E-mail: sudoplat@math.nsc.ru)*

Ehrenfeucht theories with non-dense powerful digraphs*

All known Ehrenfeucht theories are based on powerful digraphs having the density property. In the paper, we construct examples of Ehrenfeucht theories with powerful digraphs having the non-density property, i. e., with covering elements for each vertex of digraph. The construction of required theories is realized by syntactic generic ones allowing to synthesize saturated models based on the class of finite structures with some type add-ins, closed under amalgams.

Key words: Ehrenfeucht theory, powerful digraph, density property, covering element, syntactic generic construction.

1 Introduction

In [1], the notion of powerful digraph is defined, its role in Ehrenfeucht theories (i. e., having finitely many but more than one pairwise non-isomorphic countable models) is clarified, and it is proven that the transitive closure of powerful digraph, being isomorphic to the dual one, forms a dense partial order or a partial order with infinitely many covering elements for each element. All known examples of Ehrenfeucht theories are constructed either on a base of powerful digraphs containing dense partial orders (dense linear orders [2–4] or dense ordered trees [5–8]) or on a base of powerful digraphs with unbounded lengths of shortest paths and with dense transitive closures [9].

In the paper, we construct examples of Ehrenfeucht theories with powerful digraphs having non-dense transitive closures.

We use without specifications the standard graph-theoretic and model-theoretic notions [10, 11], the system of notions in [1, 9, 12] as well as general principles for constructions of generic structures based on

* The work is supported by RFBR (grant 12-01-00460-a).