

Итак, справедлива

Теорема 4. Для любого непрерывного оператора L , отображающего пространство $\{f\}$ в множество гладких функций $\{h\}$ в проколотой области Ω_0 , задача (17)–(18) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f .

Также справедливо обратное утверждение

Теорема 5. Если уравнение (17) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор L , отображающий пространство $\{f\}$ в множество гладких функций $\{h\}$ в проколотой области Ω_0 , такой, что дополнительные условия примут вид (18).

Замечание 1. Если $h(x, y)$ и $\frac{\partial h(x, y)}{\partial n}$ на $\partial\Omega$ равно нулю, то теорема 4, 5 дает одномерное возмущение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения.

Список литературы

1. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. — 189 с.
2. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. РАН. — 1961. — Т. 137. — № 5. — С. 1011–1014.
3. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Математический журнал. — Алматы, 2008. — Т. 8. — № 1(27). — С. 50–58.

УДК 517.95

М.Т.Дженалиев¹, М.И.Рамазанов², А.Е.Туймебаева¹

¹Институт математики МОН РК, Алматы;

²Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ «СУЩЕСТВЕННО» НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Мақалада бекітілген уақытта айнымалы бойынша шектелген облыста бірөлшемді жылуөткізгіштік теңдеу үшін «элеулі» жүктеме бойынша ядроның өлшемін анықтау есебі зерттелген.

In given article the problem on definition of dimension of a kernel of the operator for the one-dimensional equation of heat conductivity with «essential» loading is investigated at the fixed time variable in the limited area.

В данной статье исследуется задача на определение размерности ядра оператора для одномерного уравнения теплопроводности с «существенной» нагрузкой при фиксированной временной переменной в ограниченной области.

На практике достаточно часто возникают нагруженные уравнения, где присутствуют следы искомой функции, получающиеся при фиксированной «временной» переменной. К такого рода уравнениям приводят, например: задачи импульсного управления, задачи механики вязкоупругости с «памятью» [1], проблемы, появляющиеся при эквивалентном преобразовании нелокальных задач к локальным [2, 3] и др. Сюда также могут быть отнесены нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения [4–6].

В данной работе изучаются две задачи: первая — это установление размерности ядра оператора второй краевой задачи для одномерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности, с нагрузкой при фиксированной временной переменной; вторая — это вопросы сильной одно-

значной разрешимости второй краевой задачи для вышеназванного уравнения. Особенностью рассматриваемых здесь задач является наличие нагруженного слагаемого с производной от искомого решения более высокого порядка, чем в главной дифференциальной части уравнения. Такие уравнения названы «существенно» нагруженными [7, 8].

Задача 1. Рассматривается следующая однородная задача:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \frac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} &= 0 \quad x \in (0,1), \quad t > 0; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \quad (1)$$

Задача 2. Рассматривается следующая неоднородная задача:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha \frac{\partial^k u(x,\bar{t})}{\partial t^k} &= f(x,t) \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \quad x \in (0,1), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha \in C$, $\bar{t} \in R_+ = (0, +\infty)$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$f \in W_{2,0}^k(R_+, L_2(0,1)), \quad \varphi \in L_2(0,1). \quad (3)$$

Здесь 0 в обозначении пространства означает, что $\frac{\partial^m f(x,0)}{\partial t^m} = 0$, $m = 0, 1, \dots, k-1$.

1. О размерности ядра

Применяя косинус-преобразование Фурье с конечными пределами по переменной x к задаче (1)

$$U(n,t) = \int_0^1 u(x,t) \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2} dx, \quad n \in N, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

для Фурье-образа $U(n,t)$, получаем следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$U'(n,t) + \pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 U(n,t) + \alpha U^{(k)}(n,\bar{t}) = 0, \quad U(n,0) = \Phi(n), \quad (4)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Из (4) непосредственно следует справедливость утверждения

Теорема 1. Для того чтобы однородная задача (1) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall n \in N$ были выполнены условия:

$$0 \neq \Delta_k(n) = \begin{cases} 1 + \alpha \frac{1 - e^{-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \bar{t}}}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2}, & \text{если } k = 0, \\ \left[1 + (-1)^{k+1} \alpha \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^{2(k-1)} \cdot e^{-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \bar{t}} \right], & \text{если } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Исследуем подробнее условия (5) при различных значениях $k = 1, 2, 3, \dots$

1. Пусть $k = 0$. В этом случае условие (5) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_0(n) \equiv \frac{1 - e^{-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \bar{t}}}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2} \neq -\frac{1}{\alpha}. \quad (6)$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_0(n)$, $n \in N$ соответственно равны:

$$\varphi_{0\max} = \frac{1 - e^{-\pi^2 x^2 \bar{t}}}{\pi^2 x^2}, \quad \varphi_{0\inf} = 0, \quad \text{то есть, имеем, что } \forall n \in N, \quad 0 < \varphi_0(n) \leq \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2}{4} \bar{t}}}{\frac{\pi^2}{4}} = M_0.$$

Последние неравенства позволяют получить утверждения, которые представлены в таблице 1.

Выполнение условия теоремы 1 ($k = 0$)

		$\dim\{KerL\}$	Условие (6)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha > 0$ и $\alpha < -M_0^{-1}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -M_0^{-1}$	1	нарушается в одной точке
	c) $\alpha > -M_0^{-1}$	1	нарушается при $n = n_1$, если $\alpha = -\frac{\pi^2}{4 \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4} \bar{i}}\right)}$

Из таблицы 1 следует, что если $\alpha \in C$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > -\bar{i}^{-1}\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если же $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha \leq -M_0\}$, то задача (1) имеет ровно одно нетривиальное решение, если $\alpha = \frac{\pi^2 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)}{e^{-\pi^2 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{i}}}$.

2. Пусть $k = 1$. В этом случае условие (5) записывается в виде:

$$\varphi_1(n) \equiv e^{-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{i}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \quad (7)$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_1(n)$, $n \in N$ соответственно равны:

$$\varphi_{1\max} = \varphi_1(1) = e^{-\frac{\pi^2}{4} \bar{i}} = M_1, \quad \varphi_{1\inf} = 0, \quad \text{т.е. имеем, что } \forall s \in R, \quad 0 < \varphi_1(n) \leq e^{-\frac{\pi^2}{4} \bar{i}} = M_1.$$

Полученные данные сведем в таблицу 2.

Выполнение условия теоремы 1 ($k = 1$)

		$\dim\{KerL\}$	Условие (7)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha < -M_1^{-1}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -M_1^{-1}$	1	нарушается в единственной точке
	c) $\alpha > -M_1^{-1}$	1	нарушается при $n = n_1$, если $\alpha = -e^{\frac{\pi^2}{4} \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{i}}$

Результаты таблицы 2 означают, что если $\alpha \in C$, такое, что

$$\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > -M_1\},$$

то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha \leq -M_1\}$, то задача (1) имеет ровно одно нетривиальное решение, если $\alpha = -e^{(\pi n_1)^2 \bar{i}}$.

3. Пусть $k = 2m$, $m = 1, 2, \dots$ В этом случае условие (5) принимает вид:

$$\varphi_{2m}(n) \equiv (\pi n)^{2(2m-1)} e^{-(\pi n)^2 \bar{i}} \neq \frac{1}{\alpha}. \quad (8)$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m}(s)$, $s \in R$ соответственно равны:

$$\varphi_{2m\max} = [(2m-1)/(\bar{i}e)]^{2m-1} = M_{2m}, \quad \varphi_{2m\inf} = 0, \quad \text{т.е. имеем, что } \forall n \in N,$$

$$0 < \varphi_{2m}(n) \leq \left(\frac{2m-1}{\bar{i}e}\right)^{2m-1} = M_{2m}.$$

Выполнение условия теоремы 1 ($k = 2m, m = 1, 2, \dots$)

		$\dim\{KerL\}$	Условие (8)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha < M_{2m}^{-1}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = M_{2m}^{-1}$	1	нарушается, если \bar{t} таково, что $n_1 = \pi^{-1} \sqrt{(\bar{t}e)^{-1}(2m-1)} \in N$
	c) $\alpha > [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$	1	нарушается в 4-х точках $\pm s_1, \pm s_2$

Таким образом, из данных таблицы 3 видно, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha \neq \varphi_{2m}^{-1}(n), \forall n \in N\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Задача (1) может иметь одно нетривиальное решение, если \bar{t} таково, что существует единственное значение $n \in N$, для которого $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = \varphi_{2m}^{-1}(n)\}$. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, M_{2m}^{-1} < \alpha \leq \pi^{-2(2m-1)e^{\pi^2 \bar{t}}}\}$, то задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения, если \bar{t} таково, что существуют два значения $n_1, n_2 \in N$, для которых $\varphi_{2m}^{-1} = \alpha$.

Покажем, что такой вариант возможен. Действительно, пусть, например, $\bar{t} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \ln 2$, тогда существуют два нетривиальных решения задачи при $n_1 = \sqrt{(2m-1)/3}$, $n_2 = 2\sqrt{(2m-1)/3}$, где, например, $m = 2, 14, 38$, и др. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $\alpha = \pi \left(\frac{3\sqrt[3]{4}}{2m-1} \right)$ выполняется равенство $\varphi_{2m}(n_1) = \varphi_{2m}(n_2)$.

4. Пусть $k = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$. В этом случае условие (5) может быть записано в виде:

$$\varphi_{2m+1}(n) \equiv (\pi n)^{4m} e^{-(\pi n)^2 \bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \quad (9)$$

Тогда для $\forall n \in N$ будет справедливо соотношение:

$$0 < \varphi_{2m+1}(n) \leq \left(\frac{2m}{\bar{t}e} \right)^{2m} = M_{2m+1}.$$

Отсюда непосредственно следует

Выполнение условия теоремы 1 ($k = 2m + 1, m = 1, 2, \dots$)

		$\dim\{KerL\}$	Условие (9)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha > -[2m / (\bar{t}e)]^{2m}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -[2m / (\bar{t}e)]^{2m}$	2	нарушается в 2-х точках $\pm s_0$
	c) $\alpha < -[2m / (\bar{t}e)]^{2m}$	4	нарушается в 4-х точках $\pm s_1, \pm s_2$

Таким образом, результаты таблицы 4 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha \neq -\varphi_{2m+1}^{-1}, \forall n \in N\}$, то задача (1) имеет только тривиальное решение. Задача (1) имеет одно тривиальное решение, если \bar{t} таково, что существует только единственное значение

$n \in N$, для которого $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = \varphi_{2m+1}^{-1}(n)\}$. При $\{\text{Im } \alpha = 0, -\pi^{-4m} e^{\pi^2 \bar{t}} \leq \alpha < -M_{2m+1}^{-1}\}$ задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения, если, \bar{t} таково, что существует два значения $n_1, n_2 \in N$, для которых $\varphi_{2m+1}^{-1}(n_1) = \varphi_{2m+1}^{-1}(n_2) = \alpha$.

2. О нетривиальных решениях задачи 1. Если $\{\alpha, \bar{t}\}$ заданы согласно таблицам 1–4, то соответствующие им нетривиальные решения задачи (1) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_{(n=1)}(x, t) &= \frac{\alpha}{\pi^2} (1 - e^{-\pi^2 t}) \sin \pi x, \\ u_{(n=n_j)}(x, t) &= \frac{\alpha}{(\pi n_j)^2} \left(1 - e^{-(\pi n_j)^2 t}\right) \sin \pi n_j x, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

где вещественные числа n_j являются соответствующими корнями уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \alpha \frac{1 - e^{-(\pi n)^2 \bar{t}}}{(\pi n)^2} &= 0, \text{ если } k = 0, \\ 1 + (-1)^{k+1} \alpha (\pi n)^{2(k-1)} e^{-(\pi n)^2 \bar{t}} &= 0, \text{ если } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что ни одна из функций (10) не принадлежит пространству $L_2((0, 1) \times R_+)$. Это означает, что в пространстве $L_2((0, 1) \times R_+)$ ядро оператора L задачи (1) нульмерно. Однако каждая из функций (10) принадлежит пространству с весом:

$$L_{2, e^{-\varepsilon t}} \equiv \{v \mid v(x, t) \cdot e^{-\varepsilon t} \in L_2((0, 1) \times R_+) \text{ для } \forall \varepsilon > 0\}, \quad (11)$$

т.е. ядро оператора L задачи (1) в пространстве $L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ не всегда пусто и имеет соответствующую размерность согласно данным таблиц 1–4.

3. Класс и критерий однозначной сильной разрешимости. Дадим следующее

Определение 1. Функцию $u(x, t) \in L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ будем называть *сильным решением задачи (2)*, если существует последовательность

$$\{u_n(x, t), n = 1, 2, \dots\} \subset \{v \mid v \in L_{2, e^{-\varepsilon t}}, v(x, 0) = \varphi(x)\}$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ в пространстве } L_{2, e^{-\varepsilon t}},$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^k [Lu_n](x, t)}{\partial t^k} \rightarrow \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k} \text{ в пространстве } L_2(R \times R_+).$$

Применяя косинус-преобразование Фурье по переменной x , из (2) будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{dU(n, t)}{dt} + (n\pi)^2 U(n, t) + \alpha \frac{d^k U(n, \bar{t})}{dt^k} = F(n, t), \\ U(n, 0) = \Phi(n), \end{cases} \quad (12)$$

где $F(n, t)$, $\Phi(n)$ — образы Фурье для функций $f(x, t)$, $\varphi(x)$ соответственно. При выполнении условий (5) теоремы 1, интегрируя уравнение (12), получим следующее представление единственного решения задачи (12):

$$\begin{aligned} U(n, t) &= -\Delta_k^{-1} \alpha \frac{1 - e^{-(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^2} \left[(-1)^k (n\pi)^{2k} \Phi(n) e^{-(n\pi)^2 \bar{t}} + (-1)^k (n\pi)^{2k} \int_0^{\bar{t}} F(n, \tau) e^{-(n\pi)^2 (\bar{t} - \tau)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{m-1} (n\pi)^{2(m-1)} F^{(m-1)}(n, \bar{t}) \right] + \Phi(n) e^{-(n\pi)^2 t} + \int_0^t F(n, \tau) e^{-(n\pi)^2 (t - \tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta_k(n)$ определено в (5). Из (13) видим, что $U(n, t)$ удовлетворяет следующей, равномерной по n априорной оценке:

$$\|U(n, t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(R_+)} \leq C \left[|\Phi(n)| + \sum_{m=0}^k \|F^{(m)}(n, t)\|_{L_2(R_+)} \right], \quad (14)$$

где постоянная C не зависит от n , где $\varepsilon > 0$. Из оценки (14), используя равенство Парсеваля, получим:

$$\|u(x, t)e^{-\varepsilon t}\|_{L_2((0,1), R_+)} \leq C \left[\|\phi(x)\|_{L_2(0,1)} + \|f(x, t)\|_{L_2((0,1), R)} + \|f^{(k)}(x, t)\|_{L_2((0,1), R)} \right]. \quad (15)$$

На основе оценки (15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Задача Коши-Неймана (2) при любых $\{f, \phi\}$, удовлетворяющих условиям (3), однозначно сильно разрешима в пространстве $L_{2, e^{-\varepsilon}}$, определяемом условием (11), тогда и только тогда, когда выполнены условия (5).*

Замечание 1. Классом сильных решений задачи (2) является пространство с весом $L_{2, e^{-\varepsilon}}$, которое определено условием (11).

Список литературы

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Диф. ур-ния. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
3. Шелухин В.В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журнал. — 1991. — Т. 32. — № 2. — С. 154–165.
4. Ломов И.С. Свойства базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Диф. ур-ния. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–93.
5. Ломов И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Диф. ур-ния. — 1991. — Т. 27. — № 9. — С. 1550–1563.
6. Krall A.M. The development of general differential and general differential boundary systems // Rocky Mountains I. Math. — 1975. — Vol. 5. — № 4. — P. 493–542.
7. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. О гранично-начальной задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2005. — № 5. — С. 36–43.
8. Рамазанов М.И. О точечном спектре полупериодической граничной задачи для «существенно» нагруженного параболического уравнения // Вестн. НАН РК. — Алматы, 2006. — № 6. — С. 19–21.

УДК 517.988.68+517.968.22

А.А.Ерденева, Г.А.Тюлепбердинова

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мақалада Максвеллдің квазистационарлық жуықтау теңдеулер жүйесі үшін кері коэффициентті есеп қарастырылды. Оптимизациялық әдісті қолданып, оның дискретті аналогы құрылды. Функционалдық градиентін есептеуде соңғы-айырымды формула алынды.

V koeffitsientnaya we consider the inverse problem for Maxwell's equations in kvazistatsionar approximation. Based on the optimization method built its discrete analog. We obtain a finite-difference formula for vychesleniya inverse problem.

§1. Прямая и обратная задача в вертикальной неоднородной среде

Рассмотрим постановку прямой и обратной задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении [1]: