УДК 512.544

# Об индексно-сопряженных элементах группы

# About subscripted and associate element of the group

Теняева Л.И.

*Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова (e-mail: tenyaeva_l.i@mail.ru)*

Мақалада топ элементтерінің индекстік түйіндестіктің бинарлық қатынасы және $({}_i\equiv_c)$ индекстік эквиваленттік салыстырмалы $G$ топтың $a$ элементі — $InC(a)$ индекстік централизатор деген жаңа ішкі тобы енгізілген. «Топ элементтерінің түйіндестігі» дәстүрлі ұғым байланысында осы ұғымдардың қасиеттері қарастырылған. $FC$ топ орталығының ортасымен және коммутант арасында байланысы сипатталған. Теорема дәлелденген $(\forall a\in G)(\forall g\in G)\left(InC(a^g)=(InC(a))^g\right)$, және ол индекстік түйіндестік элементтерімен шекті кластары бар топ $FC$ топ болып табылады.

In this article we introduce the new binary relation and new subgroup – the index conjugation of the group elements $({}_i\equiv_c)$ and index centralizer $InC(a)$ of a group element $a$ over to the index equivalence respectively. The properties of these concepts with respect to the traditional conjugation of the group elements are studied. Also the description of interconnection $FC$ - group’s center with its center and commutant are received. The theorems on $(\forall a\in G)(\forall g\in G)\left(InC(a^g)=(InC(a))^g\right)$ and that the group with finite classes of the index – conjugated elements is a $FC$ - group are proved.

Понятие сопряженности элементов группы $G$ введено Г. Фробениусом (см. [1]) в конце XIX столетия. Оно стало фундаментально важным понятием теории групп. Сопряженность в теории групп (и других алгебраических системах) традиционно рассматривается только относительно бинарного отношения равенства «$=$», заданного на элементах группы

$$(\forall a,b\in G)\left(a\ {}_c\!\equiv b\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left((\exists x\in G)\left(a^x=b\right)\right), \tag{1}$$

где символ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ означает «эквивалентно по определению». Символ «${}_c\equiv$» введен в теорию групп И.И. Павлюком в работе [2].Отношение индексной эквивалентности «${}_i\equiv$» введено в статье [3]:

$$(\forall a,b\in G)\left(a\ {}_i\!\equiv b\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left(\left|C(a):C(a)\cap C(b)\right|<\infty\ \&\ \left|C(b):C(b)\cap C(a)\right|<\infty\right). \tag{2}$$

Отношения («$=$», «${}_i\equiv$») являются отношениями эквивалентности и равноправны на элементах произвольной группы. Очевидно, элементы конечной группы индексно эквивалентны. В настоящей работе рассматривается отношение сопряженности «${}_i\equiv_c$» относительно отношения индексной эквивалентности элементов произвольной бесконечной группы $\mathrm{G}$. Также найдены условия, при которых в бесконечной группе $\mathrm{G}$ центр $Z(G)$, коммутант $G'$ и $FC$ - центр $FC(G)$ совпадают друг с другом.

*Определение 1.* Элемент $a$ индексно сопряжен с элементом $b$ $\left(a\ {}_i\!\equiv_c b\right)$ в группе $\mathrm{G}$ (где $a,b\in G$), если существует в группе $\mathrm{G}$ элемент $x$ такой, что $a^x\ {}_i\!\equiv b$. Таким образом, формула

$$(\forall a,b\in G)\left(\left(a\ {}_i\!\equiv b\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left((\exists x\in G)\left(a^x\ {}_i\!\equiv b\right)\right)\right) \tag{3}$$

определяет бинарное отношение индексной сопряженности элементов группы $\mathrm{G}$. Впервые на это понятие было обращено внимание в работе [4], где рассмотрены некоторые сравнения относительно отмеченного отношения. Докажем общую лемму, дающую информацию о поведении индексной сравнимости при внутренних автоморфизмах группы.

**Лемма 1.** В группе G верна формула

$$(\forall \mathrm{a,b}\in \mathrm{G})\left(\left(a\ {}_i\!\equiv b\right)\Leftrightarrow\left((\forall g\in G)\left(a^g\ {}_i\!\equiv b^g\right)\right)\right). \tag{4}$$

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $a\ {}_i{\equiv}\ b$. Тогда по формуле (2) $\left|C(a):C(a)\bigcap C(b)\right|<\infty$. Если $C(a)\bigcap C(b)=Q$, то $\left|C(a):Q\right|<\infty$. Поскольку $C(a)\cong(C(a))^g$, а $C(a^g)=(C(a))^g$ (предложение 5 [5]), то $(\forall g\in G)\left(\left|C(a^g):Q^g\right|<\infty\right)$ и, очевидно, $\left|C(a^g):C(a^g)\bigcap C(b^g)\right|<\infty$. Аналогично устанавливается, что

$$(\forall g\in G)\left(\left|C(b^g):C(b^g)\bigcap C(a^g)\right|<\infty\right).$$

Достаточность. Пусть $(\forall g\in G)\left(a^g\equiv_i b^g\right)$. Тогда $\left|C(a^g):C(a^g)\bigcap C(b^g)\right|<\infty$ или $\left|C(a^g):Q^g\right|<\infty$, где $a^g=C(a^g)\bigcap C(b^g)$. Так как $a^g\le C(a^g)$, то, очевидно, $Q\le C(a)$. Поскольку $\left|C(a^g):Q^g\right|<\infty$ и $C(a)\cong(C(a))^g$, $Q\cong Q^g$, $Q^g\le C(a^g)$, то $\left|C(a):Q\right|<\infty$. Очевидно, $Q=C(a)\bigcap C(b)$. Таким образом, $\left|C(a):C(a)\bigcap C(b)\right|<\infty$. Аналогично устанавливается, что

$$\left|C(b):C(b)\bigcap C(a)\right|<\infty.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь становится очевидным следующий результат.

*Следствие 1.* Отношение « ${}_i{\equiv}$ » индексной эквивалентности элементов группы G устойчиво относительно действия ее внутренних автоморфизмов.

**Теорема 2.** Отношение индексной сопряженности « ${}_i{\equiv}_c$ » является отношением эквивалентности на элементах группы G.

*Доказательство.* Пусть $a\in G$. Тогда, очевидно, $a\ {}_i{\equiv}\ a$, $a^e_i\equiv a$ и $a\ {}_i{\equiv}_c\ a$. Теперь очевидно, что $(\forall g\in G)\left(g\ {}_i{\equiv}_c\ g\right)$. Таким образом, отношение « ${}_i{\equiv}_c$ » рефлексивно.

Пусть $a\ {}_i{\equiv}_c\ b$. Тогда $(\exists x\in G)\left(a^x_i\equiv b\right)$. По лемме (2) $a\ {}_i{\equiv}\ b^{x^{-1}}$. Поскольку отношение « ${}_i{\equiv}$ » симметрично, то $b^{x^{-1}}_i\equiv a$ и $b\ {}_i{\equiv}_c\ a$. Таким образом, отношение « ${}_i{\equiv}_c$ » симметрично.

Пусть теперь $a\ {}_i{\equiv}_c\ b$ и $b\ {}_i{\equiv}_c\ c$. Тогда $(\exists x\in G)\left(a^x_i\equiv b\right)$ и $(\exists y\in G)\left(b^y\equiv_1 c\right)$ или $b\ {}_i{\equiv}\ c^{y^{-1}}$. Отсюда следует, что $a^x\equiv_1 c^{y-1}$ или $a^{xy}\equiv_i c$. Таким образом, $a\ {}_i{\equiv}_c\ c$ (поскольку $xy\in G$) и отношение « ${}_i{\equiv}_c$ » транзитивно.

Теорема 2 доказана.

*Замечание.* Множество элементов группы G распадается по классам индексно сопряженных элементов, т.е. $(\forall g\in G)\left(g\in\overset{c\equiv i}{g}\right)$, где $\overset{c\equiv i}{g}$ — класс индексно сопряженных с $g$ элементов. Каждый класс не пуст. Так как $(\forall g\in G)\left((\exists e\in G)\left(g^e_i\equiv_c g\right)\right)$, где $e$ – нейтральный элемент группы G.

**Теорема 3.** Пусть G – группа. Тогда

$$(\forall a\in G)\left(\left(\overset{c\equiv}{a}\subset\overset{i\equiv_c}{a}\right)\&\left(\overset{i\equiv}{a}\subset\overset{i\equiv_c}{a}\right)\right), \tag{5}$$

где $\overset{c\equiv}{a}$ — класс сопряженных элементов группы G, а класс $\overset{i\equiv_c}{a}$ — класс индексно сопряженных элементов группы G.

*Доказательство.* Очевидно, $\left(\forall b\in\overset{c\equiv}{a}\right)(\exists z\in G)\left(b^z=a\right)$. Из сравнения $b^z=a$ следует, что $b^z_i\equiv a$. (Так как $C(b^z)=C(a)=(C(b))^z$). Далее из сравнения $b^z_i\equiv a$ следует, что $b\ {}_i{\equiv}_c\ a$ и $\overset{c\equiv}{a}\subset\overset{i\equiv_c}{a}$. Очевидно, $\left(\forall b\in\overset{i\equiv}{a}\right)\left(\left(b\ {}_i{\equiv}\ a\right)\Leftrightarrow\left(b^e_i\equiv a\right)\right)\Rightarrow\left(b\ {}_i{\equiv}_c\ a\right)$. Таким образом, $(\forall a\in G)\left(\overset{i\equiv}{a}\subset\overset{i\equiv_c}{a}\right)$.

Теорема 3 доказана.

*Следствие 2.* Для произвольной группы G верна формула

$$\left(\forall a \in G\right)\left(\left(\left|\overset{c\equiv}{a}\right| \le \left|\overset{i\equiv c}{a}\right|\right) \& \left(\left|\overset{i\equiv}{a}\right| \le \left|\overset{i\equiv c}{a}\right|\right)\right). \tag{6}$$

**Теорема 4.** Группа с конечными классами индексно сопряженных элементов является $FC$ – группой (группой с конечными классами сопряженных элементов).

*Доказательство.* Так как $\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{i\equiv c}{a}$, а $\left|\overset{i\equiv c}{a}\right|$ конечен, то $\left(\forall a \in G\right)\left(\left|\overset{c\equiv}{a}\right| < \infty\right)$ в силу следствия.

Теорема 4 доказана.

*Определение 2.* (И.И. Павлюк). Централизатором элемента $a$ в группе G относительно отношения индексной эквивалентности « $_i\equiv$ » назовем множество $InC(a)$ элементов $x$ группы G, удовлетворяющее сравнению $a_i^x \equiv a$. Таким образом $InC(a) \overset{def}{=} \left\{x / a_i^x \equiv a\right\} = R\left(a_i^x \equiv a\right)$, где $R\left(a_i^x \equiv a\right)$ – решение сравнения $a_i^x \equiv a$.

**Теорема 5.** Индексный централизатор произвольного элемента $a$ группы G является подгруппой группы G, т.е.

$$\left(\forall a \in G\right)\left(InC(a) \le G\right). \tag{7}$$

*Доказательство.* Очевидно, нейтральный элемент $e$ группы G удовлетворяет сравнению $a_i^x \equiv a$ и $e \in InC(a)$. Далее из сравнения $a_i^x \equiv a$ следует, что $a_i^{x^{-1}} \equiv a$. Таким образом, $\left(\forall x \in InC(a)\right)\left(x^{-1} \in InC(a)\right)$. Пусть теперь $x, y \in InC(a)$. Тогда $a_i^x \equiv a$ и $a_i^y \equiv a$. Отсюда $a_i \equiv a^{y^{-1}}$, $a_i^x \equiv a^{y^{-1}}$, $a_i^{xy} \equiv a$. Таким образом, $xy \in InC(a)$.

Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** В группе G верна формула

$$\left(\forall g \in G\right)\left(\forall a \in G\right)\left(InC(a^g) = \left(InC(a)\right)^g\right). \tag{8}$$

*Доказательство.* Пусть $z \in InC(a^g)$. Тогда $InC(a^g) = \left\{z / a_i^{gz} \equiv a^g\right\}$. Из сравнения $a_i^{gz} \equiv a^g$ следует, что $a_i^{gzg^{-1}} \equiv a$. Таким образом, $z^{g^{-1}} \in InC(a) = \left\{x / a_i^x \equiv a\right\}$. Из $z^{g^{-1}} \in InC(a)$ следует, что $z \in \left(InC(a)\right)^g$. Таким образом, $\left(\forall a, g \in G\right) InC(a^g) \le \left(InC(a)\right)^g$. Пусть теперь $z \in \left(InC(a)\right)^g$. Тогда $z^{g^{-1}} \in InC(a)$ и $a_i^{gzg^{-1}} \equiv a$ или $a_i^{gz} \equiv g$. Таким образом, $z \in InC(a^g)$. Отсюда $\left(InC(a)\right)^g \le InC(a^g)$.

Теорема 6 доказана.

**Лемма 2.** $\left(\forall \mathrm{A,B} \le \mathrm{G}\right)\left(\mathrm{N}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{B}) \le \mathrm{N}(\mathrm{AB})\right)$.

*Доказательство.* Пусть элемент $\mathrm{x} \in \mathrm{N}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{B})$. Тогда $\mathrm{A^x = A}$, $\mathrm{B^x = B}$ и $\mathrm{(AB)^x = A^x B^x = AB}$. Отсюда, очевидно, $\mathrm{(AB)^x = AB}$, $\mathrm{x \in N(AB)}$ и $\mathrm{N(A) \cap N(B) \le N(AB)}$.

Лемма 2 доказана.

*Следствие 3.* $\left(\forall \mathrm{a,b} \in \mathrm{G}\right)\left(\mathrm{C(a) \cap C(b) \le C(ab)}\right)$.

Доказательство следует из леммы 12 и очевидного равенства $\mathrm{N(a) = C(a)}$.

Пример группы восьмого порядка ($a^4 = b^2 = e$, $ba = a^3 b$) показывает, что существует конечная группа G, в которой коммутант $G'$ совпадает с ее центром — $Z(G)$.

Возникает вопрос: существует ли бесконечная группа с таким свойством? Очевидно, в абелевой группе G $FC$ - центр - $FC(G) = Z(G)$, а $G' = e$.

В работе найдены условия, при выполнении которых в произвольной группе G $FC(G)$ - $FC$ -центр группы $G$ совпадает с центром этой же группы $G$ (теорема 4), а в теореме 5 указаны условия, при выполнении которых $FC(G)=Z(G)$ группы $G$ совпадают с ее коммутантом $G'$.

*Определение 3.* Множество $FC(G)$ элементов группы G такое, что $(\forall x\in FC(G))\left(G_{i}\equiv C(x)\right)$, назовем $FC$ - центром группы $G$.

*Предложение.* $FC(G)$ — инвариантная подгруппа группы $G$.

*Доказательство.* Очевидно, нейтральный элемент $e=x\in G$ удовлетворяет сравнению $G_{i}\equiv C(x)$, так как $C(e)=G$. Таким образом, $e\in FC(G)$. Пусть $x,y\in FC(G)$. Очевидно, $\left(C(x)\right)^{-1}=C\left(x^{-1}\right)=C(x)$ и $x^{-1}\in FC(G)$. Таким образом, $(\forall x\in FC(G))\left(x^{-1}\in FC(G)\right)$. Далее, поскольку $Q=C(x)\bigcap C(y)\le C(xy)$ (лемма 12), а $G_{i}\equiv Q$ (теорема Пуанкаре [6]), то $G_{i}\equiv C(xy)$. Отсюда следует, что $\left(x,y\in FC(G)\right)$ $xy\in FC(G)$. Таким образом, $FC(G)$ — подгруппа группы $G$. Далее пусть $x^{g}$ — элемент, сопряженный с элементом $x\in FC(G)$. Известно, что $C(x^{g})=\left(C\left(x\right)\right)^{g}$ [5]. Так как $G_{c}\equiv C(x)$ и $(\forall g\in G)\left(G_{i}^{g}\equiv\left(C\left(x\right)\right)^{g}\right)$, то $G_{i}\equiv C\left(x^{g}\right)$. Отсюда следует, что $(\forall x\in FC(G))(\forall g\in G)\left(x^{g}\in FC(G)\right)$.

Предложение доказано.

**Лемма 3.** $(\exists H<G)\left((\forall x,y\in G\setminus H)\left(x_{c}\equiv y\right)\right)\Rightarrow\left(H\le G'\right)$.

*Доказательство.* Пусть $h\in H\setminus e$. Тогда $xh\notin H$ и по условию $xh_{c}\equiv x$. Далее $(\exists z\in G)\left(xh=x^{z}\right)$. Отсюда $h=x^{-1}x^{z}\in G'$. Таким образом, $(\forall h\in H)\left(h\in G'\right)$ и $H\le G'$.

Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** $\left((\exists H<G)(\forall x,y\in G\setminus H)\left(x_{c}\equiv y\right)\&\left(G'\ne G\right)\right)\Rightarrow\left(H=G'\right)$.

*Доказательство.* Предположим, что $G'\ne H$ и $\exists c\in G'\setminus H$. Так как $G'\lhd G$, то класс $\overset{c\equiv}{c}\subset G'$. Нетрудно видеть, что $G=\overset{c\equiv}{c}\bigcup H$. Так как $\overset{c\equiv}{c}\subset G'$, а $H\le G'$, то $G=G'$. Противоречие.

Лемма 4 доказана.

**Теорема 7.** $(\exists H<G)\left((\forall x,y\in G\setminus H)\left(x_{c}\equiv y\right)\&\left(G'\le H\right)\Leftrightarrow\left(\left|G/H\right|=2\right)\right)$.

*Доказательство.* Необходимость. Предположим, что фактор-группа $G/H$ обладает двумя различными неединичными смежными классами $\overline{g}_{1},\overline{g}_{2}$. Очевидно, $g_{1},g_{2}\in G\setminus H$ и $g_{1_{c}}\equiv g_{2}$, $(\exists z\in G)\left(g_{1}^{z}=g_{2}\right)$. Отсюда $g_{1}^{-1}g_{1}^{z}=g_{1}^{-1}g^{2}\in G'$ и $g_{1}G'=g_{2}G'$. Теперь $\overline{g}_{1}=\overline{g}_{2}$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $\left|G/H\right|=2$. Отсюда следует, что $G'\le H$. Очевидно, $(\forall g\in G)(\forall a\in G\setminus H)\left([a,g]=a^{-1}g^{-1}ag\in H\right)$. Далее, очевидно, $a^{-1}a^{g}=h\in H$ и $a^{g}=ah$, т.е. $a_{c}\equiv ah$ и $(\forall h_{1}\in H)\left(ah_{1_{c}}\equiv ah\right)$. Так как элемент $a\in aH$, то $(\forall x,y\in G\setminus H)\left(x_{c}\equiv y\right)$.

Теорема 7 доказана.

**Теорема 8.** $(\forall \mathrm{x,y}\in \mathrm{G}\backslash \mathrm{FC(G)})\left(\mathrm{x}_{\mathrm{c}}\equiv \mathrm{y}\right)\left(\left(\left|\mathrm{G/FC(G)}\right|=\infty\right)\Rightarrow\left(\mathrm{FC(G)}=\mathrm{Z(G)}\right)\right)$.

*Доказательство.* Пусть $\mathrm{a}\in \mathrm{FC(G)}\backslash \mathrm{e}$ и $\overset{c\equiv}{\mathrm{a}}=\{\mathrm{a}_{1},\mathrm{a}_{2},...,\mathrm{a}_{\mathrm{n}}\}$ — класс сопряженных с $a$ элементов. Очевидно, подгруппа $\mathrm{F}_{\mathrm{a}}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}C_{G}\left(a_{i}\right)$ имеет конечный индекс в G. Предположим, что $\mathrm{F}_{\mathrm{a}}\ne \mathrm{G}$. Так как $\mathrm{G/FC(G)}$ — бесконечная группа, $\left|\mathrm{G:F}_{\mathrm{a}}\right|<\infty$, то $\mathrm{F}_{\mathrm{a}}\ne \mathrm{FC}\left(\mathrm{G}\right)$. Пусть элемент $\mathrm{x}\in \mathrm{F}_{\mathrm{a}}\setminus\mathrm{FC}\left(\mathrm{G}\right)$, $\mathrm{h}\in \mathrm{FC}\left(\mathrm{G}\right)\setminus \mathrm{F}_{\mathrm{a}}$. Тогда элемент $\mathrm{g}=\mathrm{xh}\notin \mathrm{FC}\left(\mathrm{G}\right)$ и поэтому $\mathrm{xh}_{\mathrm{c}}\equiv \mathrm{x}$. Так как $\mathrm{F}_{\mathrm{a}}$ – инвариантная подгруппа $G$ и $x \in F_a$, то из $xh \underset{c}{\equiv} x$ следует, что $xh \in F_a$. Отсюда следует, что $h \in F_a$. Противоречие. Таким образом, $F_a = G$ и $h \in Z(G)$. А так как $Z(G) \le FC(G)$, то $FC(G) = Z(G)$.

Теорема 8 доказана.

*Теорема 9.* $(\forall x,y \in G \setminus FC(G))(x \underset{c}{\equiv} y)\big((|G / FC(G)| < \infty) \Rightarrow (FC(G) = G')\big)$.

*Доказательство.* Пусть $|G / FC(G)| = n$, и пусть $\bar{g} \in G / FC(G) = \bar{G}$, а $\bar{A} = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_i\}$ — класс сопряженных элементов с $\bar{g}$ в $\bar{G}$. Поскольку $\left|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{g}_i)\right| = n\text{-}1$, а $\left|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{g}_i)\right| = n\text{-}1$ является делителем числа $n$, то $n = 2$. Таким образом, $|G / FC(G)| = 2$ и $G' \le FC(G)$. Очевидно, $G' \ne G$. По лемме 3 $FC(G) = G'$.

Теорема 9 доказана.

Автор благодарит научного руководителя, заведующего кафедрой алгебры Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова И.И. Павлюка за постановку задач и внимание к работе.

## References


1. *Frobenius G.* Theory nature and presentation of group. — Harkov: ONGI scientific technical publishers of the Ukraine, 1937. — 214 p.
2. *Pavlyuk In.I., Pavlyuk I.I.* To theories of the comparisons in groups // Vestnik PGU. Series physics and mathematics. — Pavlodar, 2004. — T.3. — P. 34—49.
3. *Pavlyuk I.I.* About associate biprimitive final groups with subscripted comparable subgroup // Studies on algebraic theory of numbers and constructive algebra. — Alma-Ata, 1988. — P. 39–47.
4. *Marchevskaya E.N., Pavlyuk I.I.* About comparisons in group // International conference «Algebra and its applied» — Krasnoyarsk, 2002. — P. 85, 86.
5. *Tenyaeva L.I., Pavlyuk I.I.* About single comparisons in group // Material to republican scientific conference «IV Satpaev reading». Pavlodar: PGU, 2004. — P.141–144.
6. *Kurosh A.G.* Theory group. — M.: Science, 1967. — 648 p.