

М.Т.Дженалиев<sup>1</sup>, Б.А.Шалдықова<sup>2</sup>, Б.С.Құсайынова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ҚР БҒМ Математика институты, Алматы;

<sup>2</sup>Рудный индустриалдық институты;

<sup>3</sup>Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

## ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІКТІҢ СПЕКТРАЛДЫ-ЖҮКТЕЛГЕН ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБИ

*В статье рассматриваются граничные задачи для нагруженного оператора теплопроводности в четверти плоскости, относящегося к классу функционально-дифференциальных операторов и имеющего вид:  $Lu + \lambda Bu$ , где соответственно  $L$  — дифференциальная, а  $B$  — нагруженная части. Особенностью рассматриваемого оператора является то, что, во-первых, спектральный параметр  $\lambda$  является коэффициентом при нагруженном слагаемом, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора и, в-третьих, точка нагрузки, определяемая функцией  $\bar{x}(t)$ , движется с переменной скоростью, т.е. производная  $\bar{x}'(t)$  не всегда равна нулю.*

*Border problems are considered in work for loaded operator heat conduction in fourth planes, referring to class function-differential operator and being of the form of:  $Lu + \lambda Bu$ , where accordingly  $L$  — differential, but  $B$  — loaded part. The Particularity of the considered operator is that, first, spectral parameter  $\lambda$  is a factor under loaded composed, secondly, order derived in loaded composed is an order of the differential part of operator and a third, point of the load,  $\bar{x}(t)$  defined function, moves with variable velocity i.e. derivative  $\bar{x}'(t)$  not always is a zero.*

Мақалада  $Lu + \lambda Bu$ , мұндағы  $L$  — дифференциалдық, ал  $B$  — жүктелген бөлік, түріне ие болатын, функционалды-дифференциалдық операторлар класынан алынған, ширек жазықтықтағы жылу-өткізгіштіктің жүктелген операторы (кеңістік айнымалысы бойынша бірөлшемді) үшін шекаралық есеп қарастырылады. Оның ерекшелігі, біріншіден,  $\lambda$  спектралдық параметрі жүктелген қосылғыш үшін коэффициент болып табылады, екіншіден, жүктелген қосылғыштағы туындының реті оператордың дифференциалдық бөлігінің ретіне тең, үшіншіден,  $\bar{x}(t)$  функциясымен анықталатын жүктелу нүктесі айнымалы жылдамдықпен қозғалады, яғни  $\bar{x}'(t)$  туындысы әрқашанда нөлге тең емес. Оның үстіне берілген жұмыста зерттеліп отырған  $Lu + \lambda Bu = 0$  жалпыланған спектралдық есебінде  $B$  жүктемесінің операторы қайтымсыз. (Әдетте  $B^{-1}$  операторының бар болу талабы ұйғарылады [1, 2]). Мұндай оператор спектралды-жүктелген оператор деп аталады. Бұл жағдайда бұрынғы қарастырылған жүктелген дифференциалдық теңдеулерден айырмашылығы, теңдеудегі жүктелген қосылғыш оның дифференциалдық бөлігінің әлсіз ауытқуы болып табылмайды. Мұнда әлсіз ауытқуы бар операторға тән емес, жүктелген дифференциалдық оператордың жаңа қасиеттері көрсетіледі. Жұмыста қарастырылып отырған шекаралық есеп нетерлік есеп болып табылады және кейбір комплекстік жазықтықтағы қатаң түрде сипатталған  $\lambda$  спектралдық параметрінің мәні үшін есеп ақырлы оң индекске ие болады. Сонымен бірге жүктелген бөлігі қарастырылып отырған теңдеудің кіші қосылғышының коэффициентіне енетін параболалық теңдеу үшін қойылған, шекаралық есептің шешіміне арналған жұмысты ескереміз.

**1. Есептің қойылымы.**  $R_+ = (0, \infty)$ ,  $R_- = (-\infty, 0)$ ,  $R = (-\infty, \infty)$  болсын.  $Q = \{x \in R_+, t \in R_+\}$  облысында параболалық типті спектралды-жүктелген теңдеу үшін келесі шекаралық есептер қарастырылады:

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x, t)_{x=\alpha(t)} = f; \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$L_\lambda^* v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \lambda \cdot \delta^n(x - \alpha(t)) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi = g; \\ v(x, \infty) = 0, \quad v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Сонымен бірге келесі спектралдық есептерді қарастырамыз:

$$L_1 u = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=\alpha(t)} \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=\alpha(t)}; \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$L_1^* v = -\lambda \cdot \delta''(x - \alpha(t)) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\lambda \cdot \delta''(x - \alpha(t)) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi; \\ v(x, \infty) = 0, v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

мұндағы  $\lambda \in C$  — спектралдық параметр;

$$\begin{aligned} & [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f \in M(Q), [\alpha(t)]^{\frac{1-\omega}{\omega}} (x + \sqrt{t}) g \in L_1(Q), \\ & [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \Big|_{x=\alpha(t)} \in M(R_+) \end{aligned} \quad (5)$$

берілген функциялар;  $M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q)$ ,  $M(R_+) = L_\infty(R_+) \cap C(R_+)$  —  $\delta(x-t) \in E'(Q)$   $Q$  облысындағы  $x = \alpha(t)$  ашық сызығында шоғырланған дельта-функция;  $E'(Q)$  —  $Q$  облысындағы жинақы тасымалдаушысы бар жалпыланған функциялар кеңістігі;  $erfz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$   $G(x, \xi, t - \tau)$  — формуламен анықталған Грин функциясы.

$$(1)-(4) \text{ есептерде жүктеме нүктесінің қозғалысы } \bar{x}(t) = \alpha(t), \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} = 0.$$

**Ескерту 1.** Егер  $f$  функциясы  $x$ -тан тәуелді болмаса, онда (5)-тегі  $f$  функциясы үшін екінші шарт біріншіден шығады  $[\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} f \in M(Q)$ .

Сәйкесінше (1) және (2) шекаралық есептерін шешу үшін,  $U$  және  $V$  функционалдық кластарын, сонымен қатар  $L$  және  $L^*$   $D(L)$  және  $D(L^*)$  операторларының анықталу облыстарын келесі түрде анықтаймыз:

$$U = \left\{ u \left| [\alpha(t)]^{\frac{1-\omega}{\omega}} (x + \sqrt{t})^{-1} u, [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} (u_t - u_{xx}) \in M(Q), [\alpha(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} u_{xx}(x, t)|_{x=\alpha(t)} \in M(R_+) \right. \right\}; \quad (6)$$

$$V = \left\{ v \left| [\alpha(t)]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} v, [\alpha(t)]^{\frac{\omega-1}{\omega}} (x + \sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q), [\alpha(t)]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \in L_1(R_+) \right. \right\}; \quad (7)$$

$$D(L_\lambda) \equiv D(L_1) = \{ u | u \in U, u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \}; \quad (8)$$

$$D(L_\lambda^*) \equiv D(L_1^*) = \{ v | v \in V, v(x, \infty) = 0, v(0, t) = 0, v(\infty, t) = 0, v_x(\infty, t) = 0 \}. \quad (9)$$

(2) шекаралық есебі (1) есепке түйіндес болып табылады. Шынымен, (1)–(9)-ға сәйкес

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle \forall u \in D(L), \forall v \in D(L^*) \quad (10)$$

теңдікті аламыз.

**1-есеп** (1) және (2) шекаралық есептерінің шешілгіштік шарттарын зерттеуді талап етеді.

**2-есеп** (3) және (4) спектралдық есептерін (5)-(9) шарттары орындалған жағдайда  $\{\lambda, u_\lambda(x, t)\}$  және  $\{\lambda, v_\lambda(x, t)\}$  парларының анықтамасы бойынша зерттеуді талап етеді.

**2. Интегралдық теңдеулерге келтіру.** (1) және (2) шекаралық есептерін екінші ретгі ерекше одақтас Вольтер интегралдық теңдеулеріне келтіруге болатынын көрсетейік. (1) шекаралық есепте дифференциалдық бөлігін қайтару арқылы алатынымыз

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t K_0(x, t - \tau) u_{\eta\eta}(\eta, \tau)|_{\eta=\alpha(\tau)} d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (11)$$

мұндағы

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\}; \quad (12)$$

$$K_0(x, t - \tau) = \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \quad (13)$$

(1) есептің шешімін табу үшін  $u_{xx}(x, t)|_{x=\alpha(t)}$  жүктелген қосылғышты анықтау жеткілікті екендігі (11) интегралдық арақатынастан шығады. Бұл үшін (11)-ді  $x$  бойынша 2-рет дифференциалдап және белгілеу енгізіп

$$\mu(t) = (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} u_{xx}(x, t)|_{x=\alpha(t)}; \quad (14)$$

$$K_2(t, \tau) = -\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\partial^2 K_0(x, t - \tau)}{\partial x^2} \Big|_{x=\alpha(t)} = \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)}\right); \quad (15)$$

$$f_1(t) = (\alpha(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \Big|_{x=\alpha(t)}, \quad (16)$$

(11) теңдіктен келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$K_{2\lambda\mu} \equiv (I - \lambda K_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K_2(t, \tau)\mu(\tau) d\tau = f_1(t), \quad t \in R_+. \quad (17)$$

**Ескерту 2.** (16)-шы теңдіктегі  $f_1(t)$  функциясының  $R_+$ -облысында шектелген функция екендігі  $f$ -та берілген (5)-ші шарттан шығады.

$K_2(t, \tau)$  ядросы келесі қасиеттерге ие болатынын айта кетейік:

1.  $K_2(t, \tau)$  ядросы үзіліссіз, мұндағы  $0 < \tau < t < \infty$ .
2.  $K_2(t, \tau)$  ядросы  $0 < \tau < t < \infty$ .
3. Әрбір  $t_0 \geq \varepsilon > 0$  үшін  $\lim_{t \rightarrow +t_0} \int_{t_0}^t K_2(t, \tau) d\tau = 0$ .

4. Келесі шектік қатыс орындалады:  $\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = 1$ . (18)

$K_2(t, \tau)$  ядросымен анықталған үзіліссіз-шектелген функциялар кеңістігіне әсер етуші интегралдық оператордың нормасының бірге тең екендігі ( $K_2(t, \tau)$  ядросы интегралданатын ерекшелікке ие) (18) шеттік арақатынастан шығады. Бұл (17) теңдеуді шешімі бар және жалғыз болатын екінші ретті Вольтер теңдеуінен принципті түрде ерекше етіп көрсетеді. Біздің жағдайда сәйкес біртекті теңдеулердің шешімі

$$K_{2\lambda\mu} \equiv (I - \lambda K_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t K_2(t, \tau)\mu(\tau) d\tau = 0, \quad t \in R_+. \quad (19)$$

Кейбір  $\lambda \in C$  мәндері үшін нетривиалдық (нөлден өзгеше) болуы мүмкін. Бұл төменде көрсетілетін болады. Енді (1) есебіне ұқсас түрде (2)-ші есепте дифференциалдық бөлікті қайтара отырып келесі теңдікті аламыз:

$$v(x, t) = -\lambda \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, \tau - t) \delta^n(\xi - \alpha(\tau)) \otimes \int_0^\infty v(\eta, \tau) d\eta d\xi d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, \tau - t) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (20)$$

(20)-шы арақатынасты  $x$  бойынша 0-ден  $\infty$ -ке дейін интегралдап,

$$v(t) = (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \cdot \int_0^\infty v(\eta, t) d\eta \quad (21)$$

белгілеуін енгізе отырып, келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$K_{2\lambda}^* v \equiv (I - \bar{\lambda} K_2^*) v \equiv v(t) - \bar{\lambda} \int_t^\infty K_2(\tau, t) v(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t \in R_+, \quad (22)$$

мұндағы

$$K_2(\tau, t) = - \left( \frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \cdot \int_0^\infty \delta^n(\xi - \alpha(\tau)) \otimes \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}} \right) d\xi = \left( \frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi(\tau-t)^{3/2}}} \exp \left( -\frac{\alpha^2(\tau)}{4(\tau-t)} \right); \quad (23)$$

$$g_1(t) = (\alpha(t))^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} \cdot \iint_t^\infty \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}} \right) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (24)$$

**Ескерту 3.** (24) теңдіктегі  $g_1(t)$  функциясының  $R_+$  облысында интегралдануы  $g$ -да берілген (5) шартынан шығады. Мұнда келесі арақатынастар есепке алынған:

$$\delta'(\xi) \otimes \rho(\xi, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{\delta(\xi + \varepsilon)}{2\varepsilon} \otimes \rho(\xi, \tau) - \frac{\delta(\xi - \varepsilon)}{2\varepsilon} \otimes \rho(\xi, \tau) \right], E'(Q). \quad (25)$$

(22) теңдеуі (17) үшін одақтас интегралдық теңдеу екені анық. Сонымен, түйіндес (1) және (2) шекаралық есептерінің шешімі одақтас (17) және (22) интегралдық теңдеулер жұптарын зерттеу есебіне келтіріледі.

**Ескерту 4.** (17) және (22) одақтас интегралдық теңдеулерін жеткілікті кіші  $t$  мәні үшін зерттейміз, өйткені екінші ретті Вольтер интегралдық теңдеуі үшін шешімінің жалғасу мүмкіндігі ерекше.

Шынында да, Вольтер операторы үшін

$$K\mu(t) \equiv \int_0^t k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau$$

$K\mu(t)$  функциясының мәндері кез келген уақытта  $\tau \leq t$  болғанда  $\mu(t)$  функциясының мәндерімен анықталады, яғни бұл оператор процестің «алдыңғы тарихын» есепке алады. Шынында, егер ол бар болса, онда уақыттың әрбір моменті  $f(t)$  сыртқы әсер шамасы тек қана алдында өткен  $\tau \leq t$  моментімен анықталады.

Бізге интегралдық теңдеудің шешімі белгілі болсын

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f(t). \quad (26)$$

$(0, \varepsilon)$  аралығынан  $t$  кіші мәндері үшін алынған, мұндағы  $\varepsilon > 0$  — бекітілген сан. Бұл шешімді  $\mu_\varepsilon(t)$  арқылы белгілеп және  $t \geq \varepsilon$  үшін шешімін іздейміз. (26) теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$\mu(t) - \lambda \int_\varepsilon^t k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_\varepsilon(t), \quad (27)$$

мұндағы

$$f_\varepsilon(t) = f(t) + \lambda \int_0^\varepsilon k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau.$$

Егер  $t \geq \varepsilon \geq 0$  болғанда  $k(t, \tau)$  ядросы шектелген екендігі анық, бұдан (27) интегралдық теңдеу шешімділігінен тізбектеп жуықтау әдісі шығады. Сонымен, егер (26) теңдеудің аз шешімі белгілі болса, онда бүтін шешімі Пикара әдісімен табылады.

**3. Сипаттамалық интегралдық теңдеулер.** (17) және (22) теңдеулері үшін сипаттамалық интегралдық теңдеулер болып келесі одақтас теңдеулер жұбы есептеледі:

$$K_\lambda \mu \equiv (I - \lambda K) \mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t k(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_1(t), t \in R_+; \quad (28)$$

$$K_\lambda^* v \equiv (I - \lambda K^*) v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty k(\tau, t) v(\tau) d\tau = g_1(t), t \in R_+; \quad (29)$$

$$k(t, \tau) = \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2} (\alpha(t))^{\frac{4\omega-3}{\omega}} \left( (\alpha(\tau))^{1/\omega} \right)'}{2\sqrt{\pi} \left( (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)^{3/2}} \exp \left( \frac{(2\omega-1) (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4 (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - 1 (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}}} \right). \quad (30)$$

$k(t, \tau)$  ядросы қандай қасиеттерді қанағаттандырса, сипаттамалық теңдеудің  $k_2(t, \tau)$  ядросы да сондай қасиеттерге ие және

$$\int_0^t k(t, \tau) d\tau = 1, \forall t \in (0, \infty) \quad (31)$$

болғандықтан, (18) шектік арақатынас орынды.

(23) және (30) интегралдық операторлардың түрінде  $k_2(t, \tau)$  және  $k(t, \tau)$  ядроларын келесі түрде жазамыз:

$$k_2(t, \tau) = P_2(t, \tau) \exp\{-Q_2(t, \tau)\}, k(t, \tau) = P(t, \tau) \exp\{-Q(t, \tau)\},$$

мұндағы

$$P_2(t, \tau) = \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}, Q_2(t, \tau) = \frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)},$$

$$P(t, \tau) = \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2} (\alpha(t))^{\frac{4\omega-3}{\omega}} \left( (\alpha(\tau))^{1/\omega} \right)'}{2\sqrt{\pi} \left( (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)^{3/2}};$$

$$Q(t, \tau) = (2\omega-1) \frac{(\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4 \left( (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)}.$$

**Теорема 1.** Егер  $\alpha(t) = [t(1 + \alpha_0(t))]^\omega$ , мұндағы  $\alpha_0(t) = t^\beta \sigma(t)$ ,  $\beta \geq 0$ , ал  $0 \leq t \leq \infty, u|\sigma(t)| \leq C, \sigma(t) \neq 0$  үшін  $\sigma(t)$  екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$|k_2(t, \tau) - k(t, \tau)| \leq C(\omega) \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{t^{\omega-1}}{\sqrt{t-\tau}} \left[ \exp(-Q(t, \tau)/2) + \exp(-Q_2(t, \tau)/2) \right], \quad (32)$$

және шектік қатыс дұрыс

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t [k_2(t, \tau) - k(t, \tau)] d\tau = 0. \quad (33)$$

Алдын ала бірнеше леммалар дәлелдейміз.

**Лемма 1.** Егер  $\alpha_0(t)$  бірсарынды өспелі функция болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$2\omega - 1 \leq \frac{[t(1 + \alpha_0(t))]^{2\omega-1} - [\tau(1 + \alpha_0(\tau))]^{2\omega-1}}{[t(1 + \alpha_0(t))]^{2\omega-2} (1 + \alpha_0(t_1) + t_1 \alpha_0'(t_1))(t - \tau)} \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1 \text{ үшін};$$

$$1 \leq \frac{[t(1 + \alpha_0(t))]^{2\omega-1} - [t(1 + \alpha_0(\tau))]^{2\omega-1}}{[t(1 + \alpha_0(t))]^{2\omega-2} (1 + \alpha_0(t_1) + t_1 \alpha_0'(t_1))(t - \tau)} \leq 2\omega - 1, \quad \omega \geq 1 \text{ үшін},$$

мұндағы  $t_1 = \tau + \theta_1(t - \tau)$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ .

**Лемма 1-дің дәлелденуі.**

$$2\omega - 1 \leq \frac{1 - x^{2\omega-1}}{1 - x} \leq 1, \text{ егер } \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

$$1 \leq \frac{1-x^{2\omega-1}}{1-x} \leq 2\omega-1, \text{ егер } \omega \geq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

$\omega \geq 1$  болсын, онда  $0 \leq \tau \leq t$  үшін аламыз

$$\begin{aligned} [t(1+\alpha_0(t))]^{2\omega-1} (t-\tau+t\alpha_0(t)-\tau\alpha_0(\tau)) &\leq [t(1+\alpha_0(t))]^{2\omega-1} - [t(1+\alpha_0(\tau))]^{2\omega-1} \leq \\ &\leq (2\omega-1)[t(1+\alpha_0(t))]^{2\omega-1} (t-\tau+t\alpha_0(t)-\tau\alpha_0(\tau)). \end{aligned}$$

Лагранж формуласының көмегімен

$$t\alpha_0(t) - \tau\alpha_0(\tau) = (\alpha_0(t_1) + t_1\alpha_0'(t_1))(t-\tau),$$

мұндағы  $t_1 = \tau + \theta_1(t-\tau)$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ .

$$\frac{1}{2} \leq \omega \leq 1 \text{ жағдайы да осыған ұқсас.}$$

**Лемма 2.** Егер  $\alpha(t) = [t(1+\alpha_0(t))]^\omega$  функциясы, мұндағы  $\alpha_0(t) = t^\beta \sigma(t)$ ,  $\beta \geq 0$  және  $0 \leq t \leq \infty$ ,  $u|\sigma(t)| \leq C$  үшін  $\alpha_0(t)$  бірсарынды өспелі болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$|P_2(t, \tau) - P(t, \tau)| \leq M \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{t^{\omega+\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

**Лемма 2-нің дәлелденуі.**

$$\begin{aligned} |P_2(t, \tau) - P(t, \tau)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \frac{(2\omega-1)^{3/2} (\alpha(t))^{\frac{4\omega-3}{\omega}} ((\alpha(\tau))^{1/\omega})'}{(\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}}} - \frac{\alpha(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \right| = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{1}{\left( (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)^{3/2}} \left| (2\omega-1)^{3/2} (\alpha(t))^{\frac{4\omega-3}{\omega}} ((\alpha(\tau))^{1/\omega})' - \alpha(t) \left[ \frac{(\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{t-\tau} \right]^{3/2} \right| = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}}{\left( (\alpha(t))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} - (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)^{3/2}} \left| \left\{ (2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau)) - [t(1+\alpha_0(t))]^\omega \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \left( (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)'_{|\tau=t} - \frac{1}{2} \left( (\alpha(\tau))^{\frac{2\omega-1}{\omega}} \right)''_{|\tau=t_2} (t-\tau) \right\}^{3/2} \right|, \end{aligned}$$

мұндағы  $t_2 = \tau + \theta_2(t-\tau)$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ . Сол сияқты  $\alpha(t) = (t(1+\alpha_0(t)))^\omega$  болғандықтан, 1-лемманы ескере отырып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\begin{aligned} |P_2(t, \tau) - P(t, \tau)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{1}{\left( (t(1+\alpha_0(t)))^{2\omega-1} - (\tau(1+\alpha_0(\tau)))^{2\omega-1} \right)^{3/2}} \times \\ &\times \left| \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau)) - [t(1+\alpha_0(t))]^\omega}{\left( (t(1+\alpha_0(t)))^{2\omega-1} - (\tau(1+\alpha_0(\tau)))^{2\omega-1} \right)^{3/2}} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau))}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. \frac{[t(1+\alpha_0(t))]^\omega}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. \frac{1/2(2\omega-1)(2\omega-2) [t_2(1+\alpha_0(t_2))]^{2\omega-3} (1+\alpha_0(t_2) + t_2\alpha_0'(t_2))^2 (t-\tau) -}{-1/2(2\omega-1) [t_2(1+\alpha_0(t_2))]^{2\omega-2} [2\alpha_0(t_2) + t_2\alpha_0''(t_2)] (t-\tau)^{3/2}} \right| = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau))}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2}}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(2\omega-2) \right\} \right| \times \\
& \times [t(1+\alpha_0(t))]^{2-2\omega} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{-1} [t_2(1+\alpha_0(t_2))]^{2\omega-3} (1+\alpha_0(t_2) + t_2\alpha_0'(t_2))^2 (t-\tau) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \left| \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau))}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2} [t(1+\alpha_0(t))]^{4\omega-3} (\alpha_0(\tau) + \tau\alpha_0'(\tau)) - \alpha_0(t) - t\alpha_0'(t)}{\delta^{3/2}(\omega) [t(1+\alpha_0(t))]^{3\omega-3} (1+\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t))^{3/2} (t-\tau)^{3/2}},
\end{aligned}$$

мұнда

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 2\omega-1, & 1/2 \leq \omega \leq 1; \\ 1, & \omega \geq 1. \end{cases}$$

$t$  жеткілікті аз деп есептеп, яғни

$$\alpha_0(t) + t\alpha_0'(t) \leq 1 \tag{34}$$

шарты орындалатындай деп есептесек,

$$|P_2(t, \tau) - P(t, \tau)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{(2\omega-1)^{3/2} 2^\omega t^\omega \alpha_0(t)}{\delta^{3/2}(\omega) (t-\tau)^{3/2}} \leq \bar{M} \left( \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \frac{t^{\omega+\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}$$

орындалады. Сонымен, лемма 2 дәлелденді.

#### Әдебиеттер тізімі

1. Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифф. уравнения. — М., 2001. — Т. 37. — № 1. — С. 48–54.
2. Рамазанов М.И. О краевой задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Докл. АМАН. — Нальчик, 2004. — Т. 7. — № 1. — С. 84–91.