10 Shepelev I.G. *Mathematical methods and management models in construction: Education guidance*, Moscow: Higher school, 1980, 213 p.

11 Kholod N.I., Kuznetsov A.V., Zhikhar Y.N. et al. *Economic-mathematical methods and models: Education guidance*, Minsk: BGEU, 1999, 413 p.

12 Labsker L.G., Babeshko L.O. *The theory of queues in the economic field: Education guidance*, Moscow: Banks and exchanges, YUNITI, 1998, p. 10.

13 Shelobayev S.I. *Mathematical methods and models in economics, finance, business: Education guidance*, Moscow: YUNITI-DANA, 2000, 367 p.

14 Khakimova E.A. *Marketing in Russia and abroad*, 2010, 1 (75), p. 30–36.

15 Fedoseeva V.V., Eriashvili N.D. *Economic-mathematical methods and models in marketing: Education guidance*, Moscow: YUNITI-DANA, 2001, p. 142.

16 Epishin Y.G. *Economic-mathematical methods in planning of consumer cooperation:* Textbook, Moscow: Economy, 1975, p. 180, 181.

17 Astashkin N.V. *Use of probabilistic systems of servicing in mining*, Moscow: «Nedra» Publ., 1971, 160 p.

18 Shulga Y.N., Suslov O.P., Anokhin V.S. *Application of methods of the theory of queues in case of research of processes of production and coal transportation*, Moscow: «Nedra» Publ., 1971, 160 p.

19 Aldokhin I.P. *The theory of queues in the industry*, Moscow: Economy, 1970, 207 p.

УДК 917.926

Д.Н.Нургабыл

Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова, Талдыкорган
(E-mail: kebek.kz@mail.ru)

Аналитический метод исследования решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

В статье рассмотрена неоднородная задача Коши для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производных. На основе фундаментальной системы решений найдено аналитическое представление решения задачи Коши. Получены асимптотические оценки решения и его производных.

Ключевые слова: асимптотические оценки, неоднородная задача, линейное дифференциальное уравнение.

Довольно для широкого класса сингулярно возмущенных задач были разработаны эффективные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные приближения с любой точностью [1–8].

Вместе с тем, для широкого класса сингулярно возмущенных задач выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений без предварительного исследования оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам можно отнести и начальные задачи, для которых характерно наличие явления начального скачка. Наибольшие общие результаты в этом направлении получены в [9–11].

Однако в указанных работах рассматривается случай, когда малый параметр содержится только при старшей производной. Естественно, возникает вопрос о выделении новых классов начальных задач, обладающих явлением начального скачка. Именно это и является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t)\frac{d^{n+r}y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t)\frac{d^k y}{dt^k} = h(t),\ 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

с условиями

$$\left.\frac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=0} = \alpha_i,\ i = \overline{0, n+m-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; α_i — постоянные, $A_{n+m}(t) = 1$.

В настоящей работе устанавливаются асимптотические оценки решения и его производных при $\varepsilon \to 0$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1^0. Функции $A_i(t) \in C^{n+m+1}([0,1]),\, i=\overline{0,n+m},\ h(t) \in C([0,1])$.

2^0. Функция $A_n(t)$ удовлетворяет неравенству $A_n(t) \neq 0,\ 0 \le t \le 1$.

3^0. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^m + A_{n+m-1}(t)\,\mu^{m-1} + \ldots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0 \tag{3}$$

имеет m различных корней $\mu_1, \ldots, \mu_m$ с отрицательными вещественными частями.

2. Фундаментальная система решений. Пусть $\bar{W}(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ уравнения

$$L_0 \bar{y} = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k \bar{y}}{dt^k} = 0. \tag{4}$$

Тогда $\bar{W}(t) \neq 0,\ t \in [0,1]$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное возмущенное уравнение

$$L_\varepsilon y = 0. \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1^0–3^0. Тогда для фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,\ n+m}$ сингулярно возмущенного однородного уравнения (5) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$y_i^{(q)}(t,\varepsilon) = u_i^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \quad q=\overline{0,n+m-1}; \tag{6}$$

$$y_{n+r}^{(q)}(t,s) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_r(x)dx \right) \Big(u_{n+r}(t) \mu_r^q(t) + O(\varepsilon) \Big),\ r=\overline{1,m}, \quad q=\overline{0,n+m-1},$$

где $u_{n+r}(t) \neq 0,\ t \in [0,1]$.

Доказательство леммы непосредственно следует из известной теоремы Шлезингера-Биркгофа-Нуайона [7]. Процедура определения $u_{n+r}(t)$ приведена в работах [10, 11].

Учитывая представления (6), для вронскиана $W(t,\varepsilon)$ фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon),\ \ i=\overline{1,n+m}$ уравнения (5) получаем

$$W(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \bar{W}(t) \cdot \pi(t) \cdot \omega(t) \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x)dx \right) \big(1 + O(\varepsilon)\big) \neq 0. \tag{7}$$

3. Начальные функции.

Определение 1. Функции $K_i(t,s,\varepsilon)$, определенные при $0 \le t,s \le 1$, называются начальными функциями, если они по t удовлетворяют однородному уравнению (5) и при $t=s$ начальным условиям

$$K_i^{(j)}(s,s,\varepsilon) = 0,\ \ j=i-1,\ i=\overline{1,n+m}; \tag{8}$$

$$K_i^{(j)}(s,s,\varepsilon) = 1, \quad j \neq i-1, \quad i=\overline{1,n+m}, \quad j=\overline{0,n+m-1}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1^0–3^0. Тогда при достаточно малых ε начальные функции $K_i(t,s,\varepsilon)$ при $0 \le t,s \le 1$ существуют, единственны и выражаются формулой

$$K_i(t,s,\varepsilon) = W_i(t,s,\varepsilon) / W(s,\varepsilon), \tag{9}$$

где $W_i(t,s,\varepsilon)$ — *определитель $n+m$-го порядка, получаемый из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой i-ой строки фундаментальной системой решений $y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon), \ldots,\ y_{n+m}(t,\varepsilon)$ уравнения* (5).

Лемма 2. Если выполнены условия 1^0-3, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ начальные функции $K_i(t,s,\varepsilon)$ при $0 \le s \le t \le 1$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left| K_i^{(q)}(t,s,\varepsilon) \right| \le C \left(1 + \varepsilon + \varepsilon^n \exp\left(-\frac{\nu(t-s)}{\varepsilon} \right) \right),\ i=\overline{1,n}, \quad q=0,1,\ldots,n+m-1; \tag{10}$$

$$\left|K_{n+r}^{(q)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{r}\left(1+\varepsilon+\varepsilon^{n-q-1}\exp\left(-\frac{\nu(t-s)}{\varepsilon}\right)\right),\ r=\overline{1,m},\ q=0,1,...,n+m-1.$$

Справедливость оценок (10) следует из (9), (6), (7).

4. Аналитическое представление и оценка решения. Рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу (1), (2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1^0–4^0. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ сингулярно возмущенная начальная задача (1), (2) на отрезке $[0,1]$ существует, единственна и выражается формулой

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n+m}\alpha_{i-1}K_i(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K_{n+m}(t,s,\varepsilon)h(s)ds. \tag{11}$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из самого способа построения функции $K_i(t,s,\varepsilon)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1^0–3^0. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ для решения $y(t,\varepsilon)$ начальной задачи (1), (2) и его производных на отрезке $0\le t\le 1$ справедливы следующие оценки:

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{i-1}\right|+\sum_{r=1}^{m}\left|\alpha_{n+r-1}\right|\varepsilon^{r}+\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{n-q}\exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}\left|\alpha_{n+r-1}\right|\varepsilon^{r-1}+\max_{0\le t\le 1}\left|h(t)\right|\right)\right],\ q=\overline{0,n+m-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Оценивая решение (11) с учетом (10), получаем требуемую оценку (12). Теорема доказана.

Теперь определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных соображений мы не можем сформулировать начальные условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0\overline{y}=h(t), \tag{13}$$

получаемого из (1) при $\varepsilon=0$. Такие дополнительные соображения мы можем получить из теоремы 3. Из оценки (12) при $q=0$ следует, что предельная функция для $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ не будет содержать $\alpha_n,\alpha_{n+1},...,\alpha_{n+m-1}$, так как коэффициенты при $\alpha_i(i=\overline{0,n-1}$ имеют порядок $O(1)$, а при $\alpha_n,\alpha_{n+1},...,\alpha_{n+m-1}$ имеют порядок $O(\varepsilon^r)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, начальные условия для решения $\overline{y}(t)$ невозмущенного уравнения (13) определяются с помощью условий (2), содержащих $\alpha_i(i=\overline{0,n-1}$:

$$\frac{d^i\overline{y}}{dt^i}\Big|_{t=0}=\alpha_i,\ i=0,1,...,\ n-1. \tag{14}$$

Ниже покажем, что уравнение (13) и условия (14) действительно определяют вырожденную задачу.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1^0–3^0. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливы оценки

$$\left|\,y^{(q)}(t,\varepsilon)-\overline{y}^{(q)}(t)\,\right|\le C\varepsilon,\quad 0\le t\le 1,\ q=0,1,...,n-1; \tag{15}$$

$$\left|\,y^{(q)}(t,\varepsilon)-\overline{y}^{(q)}(t)\,\right|\le C\left(\varepsilon+\varepsilon^{n-q}\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),0\le t\le 1,\ q=n,...,n+m-1,\ e\, y(t,\varepsilon)\text{ —}$$

решение задачи (1), (2); $\overline{y}(t)$ — решение задачи (13) и (14).

Доказательство. Пусть $y(t,\varepsilon)-\overline{y}(t)=u(t,\varepsilon)$. Тогда из (1), (2) относительно $u(t,\varepsilon)$ получаем задачу

$$L_\varepsilon u=f(t,\varepsilon),\quad f(t,\varepsilon)=O(\varepsilon),\quad 0\le t\le 1; \tag{16}$$

$$\frac{d^iu}{dt^i}\Big|_{t=0}=0,i=\overline{0,n-1},\ \frac{d^iu}{dt^i}\Big|_{t=0}=\alpha_i-\overline{y}^{(i)}(0),i=\overline{n,n+m-1}.$$

Применяя теорему 3 к краевой задаче (16), получим искомые оценки (15). Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 4 непосредственно следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2), при стремлении малого параметра ε к нулю, стремится к решению $\overline{y}(t)$ вырожденной задачи (13),(14).

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon)=\overline{y}^{(q)}(t),\quad 0\le t\le 1,\ q=0,1,...,n-1;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon)=\overline{y}^{(q)}(t),\quad 0< t\le 1,\ q=n,...,n+m-1. \qquad (17)$$

Заметим, что предельные переходы (17) не являются равномерными в окрестности точки $t=0$. Из (15), (16), (17) приходим к выводу, что если $\alpha_i-\overline{y}^{(i)}(0)\ne 0,\ i=\overline{n,n+m-1},$ то в окрестности точки $t=0$ происходит явление начального скачка n-го порядка кратности m.

Работа выполнена по бюджетной программе 055 «Научная и/или научно-техническая деятельность», подпрограмма 101 «Грантовое финансирование научных исследований» МОН РК.

Список литературы

1 *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. — 1948. — Т. 22 (64). — № 2. — С. 193–204.

2 *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. — 1957. — Т. 12. — № 5. — С. 3–122.

3 *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной // ДАН СССР. — 1958. —Т. 123. — № 4. — С. 583–586.

4 *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

5 *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1979. — 154 с.

6 *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Фрунзе: Илим, 1962. — Т. 2. — С. 21–39.

7 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 399 с.

8 *Бутузов В.Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений второго порядка // ДАН СССР. — 1977. — Т. 235. — № 5. — С. 997–1000.

9 *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. — 1960. — Т. 132. — № 6. — С. 1242–1245.

10 *Касымов К.А., Нургабыл Д.Н.* Асимптотическое поведение решений линейных сингулярно возмущенных общих разделенных краевых задач, имеющих начальный скачок // Украинский математический журн. — 2003. — Т. 55. — № 11. — С. 1496–1508.

11 *Касымов К.А., Нургабыл Д.Н.* Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2004. — Т. 40. — № 4. — С. 597–607.

Д.Н.Нұрғабыл

Туындыларының жанында кіші параметрі бар сызықты дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есеп шешімін зерттеудің аналитикалық әдісі

Мақалада бейбіртекті ерекше ауытқыған жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі қарастырылған. Фундаменталды шешімдер жүйесі арқылы Коши есебі шешімінің аналитикалық формуласы анықталды. Шешімнің және оның туындыларының асимптотикалық бағамдары табылды.

D.N.Nurgabyl

Analytical method of research solution of initial problem for linear differential equations with small parameter at derivatives

In this article inhomogeneous initial problem for linear differential equation with small parameter near derivatives is considered. On the basis of fundamental system of solutions analytical representation of solution of initial problem is founded. Asymptotic estimations of solution and derivatives are obtained.

References

1 Tihonov A.N. *Math col.*, 1948, 22 (64), 2, p. 193–204.

2 Vishik M.I., Lyusternik L.A. *UMN*, 1957, 12, 5, p. 3–122.

3 Vasslieva A.B. *DAN SSSR*, 1958, 123, 4, p. 583–586.

4 Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Y.A. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear fluctuations*, Moscow: Nauka, 1974, 503 p.

5 Mischenko E.F., Rozov N.H. *Differential equations with small parameter and relaxation fluctuations*, Moscow: Nauka, 1979, 154 p.

6 Imanaliev M.I. *Researches on the integro-differential equations*, Frunze: Ilim, 1962, 2, p. 21–39.

7 Lomov S.F. *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, 399 p.

8 Butuzov V.F. *DAN SSR*, 1977, 235, 5, p. 997–1000.

9 Vishik M.I., Lyusternik L.A. *DAN SSSR*, 1960, 132, 6, p. 1242–1245.

10 Kassymov K., Nurgabyl D.N. *Ukrainian Mathematical Journal*, Kiev, 2003, 55, 11, p. 1496–1508.

11 Kassymov K.A., Nurgabyl D.N. *Differential equations*, 2004, 40, 4, p. 597–607.

ӘОЖ 517.518.1

А.М.Омаров, Н.В.Попова, Ж.Т.Есендаулетова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: Esendauletova81@mail.ru)

Технологиялық сызықтарды жүктеудің сезімталдық бағасы мен тиімділігі

Мақалада өндірістің технологиялық деңгейін жоғарлату мақсатында экономика-математикалық модельді пайдалану арқылы есептің шешімін алу қарастырылды. Мысалда электрондық өндіріс кәсіпорыны моделі екі түрлі радиоқабылдағыш шығарады. Есептің мақсаты — өнімнің жүзеге асырылуынан барынша көп табысқа қол жеткізу. Радиоқабылдағыштардың өндірісі туралы есептің тиімді шешімінің сезімталдығы талданған, сонымен қатар есеп шешімінің үш қорытындысы келтірілген.

Кілт сөздер: ресурс, технологиялық сызық, ресурс қоры, тиімді шешім, дефицит.

Өнеркәсіп өндірістерінде өндірістің технологиялық деңгейін көтеру мақсатында рационалды шешімдерді ұйымдастыру, өндірістік процестерді механизациялау және автоматтандыру, ресурстарды пайлананудың жақсарту, өнімдерді іске асыру, техника-экономикалық жоспарланған есептерді шешу және де басқа мәселелер үлкен мәнге ие болып келеді. Жоғарыда келтірілген есеп түрлерін экономика-математикалық модельдерді және компьютер арқылы шығару көп көмегін тигізеді.

Электрондық өндіріс кәсіпорыны радиоқабылдағыштың екі моделін шығарады, сонымен бірге әрбір модель жеке техникалық сызықтарда өндіріледі. Бірінші сызықтың күндік көлемі — 60 дана, ал екінші сызықтікі — 80 дана. Радиоқабылдағыштың бірінші моделіне бір типті электрондық схемалардың 15 элементі жұмсалады, ал радиоқабылдағыштың екінші моделіне бір типті электрондық схемалардың 10 элементі жұмсалады. Пайдаланылатын элементтердің күндік максималды қоры 950 бірлікке тең. Радиоқабылдағыштардың бірінші және екінші модельдерінің бір өнімнің сатылымынан түсетін табысы сәйкесінше 40 және 20 $ тең. Есептің графикалық шешіміне сүйене отырып, бірінші және екінші модельдерді өндіруде күндік тиімді көлемді анықтау керек.

Есепте радиоқабылдағыштардың бірінші және екінші модельдерін қанша көлемде өндіру қажет екендігін анықтау қажет. Сондықтан ізделінетін өлшемдер, яғни, есептің айнымалылары ретінде радиоқабылдағыштардың әрбір түрі бойынша *өндірістің күндік көлемі* болып табылады: x_1 — радиоқабылдағыштың бірінші моделі бойынша өндірістің күндік көлемі, (дана/күніне); x_2 — радиоқабылдағыштың бірінші моделі бойынша өндірістің күндік көлемі, (дана/күніне). Есептің мақсаты өнімді іске асыруда максималды табысқа қол жеткізу болып табылады. Ол дегеніміз тиімділік критерийі ретінде *максимумға* ұмтылатын *күндік табыстың* параметрі қарастырылады.