15. *Somer L.* The divisibility properties of primary Lucas recurrences with respect to primes — Fibonacci Quart. — 1980. — 18. — № 4. — P. 344–353.
16. *Trost E.* Prime numbers. — M.: GIFML, 1959.
17. *Lekkerker C.G.* Vorstelling van natunrijke getullen door een om van getalllen van Fibonacci-Simon Sterin. — 1951/52/29. — № 4. — 190–195.
18. *Bruckman P.* Some divisibility properties of generalized Fibonacci sequences. — 1979. — 17. — № 1. — P. 42–49.
19. *Matiiasevich U.V.* Prime numbers are enumerated by polynom of 10 variables — Not. of scien. sem. of Leningr. dep. math. inst., 1977. 68. — P. 62–82.
20. *Jones James. P.* Diophantine representation on the Fibonacci numbers // Fibonacci Quart. — 1975. — 13. — № 1. — P. 84–85.
21. *Heed Joseph, Kelly Lucille.* An interesting sequence of Fibonacci sequence generating // Fibonacci Quart. — 1979. — 13. — № 1. — P. 29–30.
22. *Long C.* The decimal expansion of 1/89 and rerated results // Fibonacci Quart. — 1981. — 19. — № 1. —P. 53–55.
23. *Backstrom R.P.* On reliprocical series related of Fibonacci numbers with subscripts in arithmetic progression // Fibonacci Quart. — 1981. — 19. — № 1. — P. 14–21.
24. *M. de Leon*. Pells equation and Pell number triples-Fibonacci Quart. — 1975. — 14. — № 5. — P. 456–460.
25. *Kierstead H.* Fibonoid sequences modulo m-y. Recreat. Math. — 1979–1980. — 12, 1. — P. 32–44.

УДК 517.5

Об одном свойстве трансформированного оператора свертки

About the property of the modified convolution operator

Джумабаева А.А.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: Jumabaeva2010@yandex.kz)

s-саны қандайда бір шартты қанағаттандыратын A үйірткі операторы зерттелді. Бастапқы оператордың өзегін «көбейткіш» деп аталатын қандайда бір φ функцияға көбейгендегі «өзгертілген» A_φ операторы қарастырылды. Есептің негізі A операторына A_φ операторын сәйкес қоятын түрлендіру шенелген болатындай, φ функциясына шарт табудан тұрады. Мақалада φ функциясы үшін $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$ класында жататын көбейткіш болуының жеткілікті шарты алынған. Бұл шарт толық «вариация кеңістігі» терминінде анықталған. Дәлелдеуі торлық кеңістік әдісіне негізделген.

We study the convolution operator A, s numbers of which satisfy a certain condition. A «transformed» operator A_φ is considered, where the core of the first operator A is multiplied a certain function φ. The function φ is called «multiplier». The problem is to find conditions on the function φ for which the operator is assigns the operator A to the operator A_φ will be limited. We obtain a sufficient condition on the multiplier φ ensuring that it belongs to space $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$. The condition is expressed in terms of spaces of a total variation. The proof is based on the method of net spaces.

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Через $\sigma_{p,q}$ обозначим класс вполне непрерывных операторов A, действующих в пространстве 1-периодических функций $L_2[0,1]$, для которых конечна величина

$$\sum_{m=1}^{\infty} s_m^q(A) m^{q/p - 1} < \infty$$

с соответствующей квазинормой

$$\|A\|_{\sigma_{p,q}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m^q(A) m^{q/p - 1} \right)^{1/q}.$$

Здесь $\{s_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$, s_m — числа оператора A. Напомним, что числа оператора A s_m есть собственные значения оператора $\sqrt{A^* A}$, перенумерованные в порядке невозрастания.

Теперь рассмотрим интегральный оператор вида

$$\left(Af\right)(y)=\int_0^1 K(x-y)f(x)dx, \tag{1}$$

действующий в $L_2[0,1]$. Сопоставим оператору (1) «трансформированный» оператор

$$\left(A_\varphi f\right)(y)=\int_0^1 \left(K\varphi\right)(x-y)f(x)dx.$$

Будем говорить, что φ принадлежит классу $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$, если из того, что $A\in\sigma_{p_0,q_0}$, следует, что $A_\varphi\in\sigma_{p_1,q_1}$ и выполнено неравенство

$$\left\|A_\varphi\right\|_{\sigma_{p_1,q_1}}\le c\left\|A\right\|_{\sigma_{p_0,q_0}}.$$

Это означает, что линейный оператор $R_\varphi : A\to A_\varphi$ ограничен из σ_{p_0,q_0} в σ_{p_1,q_1}.

Определим норму в пространстве $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$ следующим образом:

$$\left\|\varphi\right\|_{M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}}=\left\|R_\varphi\right\|_{\sigma_{p_0,q_0}\to\sigma_{p_1,q_1}}=\sup\frac{\left\|A_\varphi\right\|_{\sigma_{p_1,q_1}}}{\left\|A\right\|_{\sigma_{p_0,q_0}}}.$$

Задача заключается в нахождении условий для функции φ, гарантирующих ограниченность оператора R_φ из σ_{p_0,q_0} в σ_{p_1,q_1}.

Замечание. Задачу об оценке s-чисел «трансформированного» оператора можно свести к исследованию следующего неравенства:

$$\left\|a*\lambda\right\|_{l_{p_1,q_1}}\le c\left\|a\right\|_{l_{p_0,q_0}}, \tag{2}$$

где нужно описать класс тех функций φ с коэффициентами Фурье $\lambda=\left\{\lambda_m\right\}_{m=-\infty}^{\infty}$, для которых выполняется неравенство (2).

Действительно, будем искать функцию φ в виде $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\lambda_m e^{-imx}$. Тогда, учитывая, что

$$\left\|c(k\varphi)\right\|_{l_{pq}}=\left\|\int_{-\pi}^{\pi}K(x)\varphi(x)e^{-imx}dx\right\|_{l_{pq}}=\left\|\int_{-\pi}^{\pi}K(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{ikx}e^{-imx}dx\right\|_{l_{pq}}=\left\|\int_{-\pi}^{\pi}K(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{i(k-m)x}dx\right\|_{l_{pq}}=$$

$$=\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k\int_{-\pi}^{\pi}K(x)e^{i(k-m)x}dx\right\|_{l_{pq}}=\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_{k-m}\right\|_{l_{pq}}=\left\|a*\lambda\right\|$$

и то, что s-числа оператора свертки совпадают с модулями коэффициентов Фурье ядра $K(x)$, имеем:

$$\left\|\varphi\right\|_{M_{p_0q_0}^{p_1q_1}}=\sup_{a\in l_{p_0q_0}}\frac{\left\|a*\lambda\right\|_{l_{p_1q_1}}}{\left\|a\right\|_{l_{p_0q_0}}}.$$

При $p_0=p_1=q_0=q_1$ данная задача рассматривалась в работах С.Б.Стечкина [1], И.И.Хиршмана [2]. Результаты были получены в терминах пространств Гельдера и ограниченной β-вариации. Распространение на многомерный случай этих утверждений сделал С.Л.Эдельштейн [3] в 1977 г. Дальнейшее развитие данная тема получила в работах М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [4] в терминах пространств Соболева. Эти результаты были усилены Г.Е.Караджовым [5] с помощью классов Бесова. Класс $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$ был введен и рассмотрен в работах Е.С.Смаилова и Н.Т.Тлеухановой [6, 7] в терминах пространств Бесова и Лоренца.

Дадим определение некоторых пространств, которые будут использоваться в дальнейшем. Дискретное пространство Лоренца $l_{p,q}$ определим как пространство числовых последовательностей $\xi=\left\{\xi_k\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$, с единственной предельной точкой 0, для которых конечны величины

$$\left\|\xi\right\|_{l_{pq}}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m^*\right|^q m^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} \text{ при } 1\le q<\infty,$$

$$\|\xi\|_{l_{p\infty}} = \sup_m m^{\frac{1}{p}} \xi_m^* \text{ при } q = \infty,$$

где $\left\{\xi_m^*\right\}_{m=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности $\left\{|\xi_k|\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Пусть μ — линейная мера Лебега, M — фиксированное семейство множеств конечной меры из $[0,1]$. В дальнейшем M будем называть «сетью». Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M, определим функцию

$$\overline{f}(t,M) = \sup_{e\in M,|e|>t} \frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)d\mu\right|.$$

Здесь $|e| = \mu e$. Функция $\overline{f}(t,M)$ называется средней функцией для $f(x)$ по сети M.

Через $N_{p,q}(M)$, $0 < p,q \le \infty$, обозначим множество функций f, для которых при $q<\infty$

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\overline{f}(t,M)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и при $q=\infty$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\overline{f}(t,M) < \infty.$$

Данные пространства были введены Е.Д.Нурсултановым в работе [8].

Отметим, что при $1 \le q_0 \le q_1$ $\quad N_{p,q_0}(M) \subset N_{p,q_1}(M)$.

Теорема А ([8]). Пусть $2 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, M_0 — множество всех отрезков в $[0,1]$, M_1 — множество всех компактов в $[0,1]$, $f \in N_{p',q}(M_1)$. Тогда имеет место оценка

$$c_0\|f\|_{N_{p',q}(M_0)} \le \|a\|_{l_{p,q}} \le c_1\|f\|_{N_{p',q}(M_1)}, \tag{3}$$

где $a = \{a_k\}_{k\in Z}$ — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in Z}$, константы c_0 и c_1 зависят только от параметров p, q.

Через $\tilde{V}_s^{\alpha}$ обозначим класс функций $\varphi(x)$ из $L_1[0,1]$, определенных на $[0,1]$ и для которых конечна величина

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-k\alpha}\bigvee_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\varphi\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

где $\bigvee_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\varphi$ — полная вариация функции $\varphi(x)$ на промежутке $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $1 < p_0, p_1, r < \infty$, $1 \le q_0, q_1, s \le \infty$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_0}$, $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{s}$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,1]$. Тогда верно следующее неравенство:

$$\|\varphi\|_{M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}} \le c\left(\varphi(1) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k}{r}}\bigvee_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\varphi\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}\right),$$

т.е. $\tilde{V}_s^{1/r} \subset M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$.

Доказательство. В пространствах Лоренца имеет место неравенство Юнга

$$\|a*\lambda\|_{l_{p_1q_1}} \le c\|a\|_{l_{p_0,q_0}}\|\lambda\|_{l_{r's}},$$

где $\dfrac{1}{p_1} + 1 = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{r'}$, $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{s}$.

Пусть $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$. Используя двойственное представление нормы в пространстве Лоренца и равенство Парсеваля, имеем:

$$\|\lambda\|_{l_{r's}} = \sup_{\|b\|_{l_{rs'}}=1} \sum_{k=\infty}^{\infty} \lambda_k b_k = \sup_{\|b\|_{l_{rs'}}=1} \int_0^1 \varphi(x) g(x)\,dx,$$

где $g(x)$ — функция с коэффициентами Фурье $b = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $g(x) \approx \sum_{k\in Z} b_k e^{ikx}$.

Проинтегрируем по частям, в результате имеем:

$$\sup_{\|b\|_{l_{rs'}}=1} \left| \int_0^1 \varphi(x) g(x)\,dx \right| = \sup_{\|b\|_{l_{rs'}}=1} \left| \int_0^1 \varphi(x) \left(\int_0^x g(s)\,ds \right)' dx \right| = \sup_{\|b\|_{l_{rs'}}=1} \left(\left| \varphi(1) \int_0^1 g(s)\,ds \right| + \left| \int_0^1 \int_0^x g(s)\,ds\,d\varphi \right| \right).$$

Введем обозначение $\overline{g}_k = \sup_{x \ge 2^{-k}} \frac{1}{x} \left| \int_0^x g(s)\,ds \right|$.

Оценим первое слагаемое. Для этого используем свойства сетевого пространства и неравенство (3):

$$\left| \varphi(1) \int_0^1 g(s)\,ds \right| \le \left|\varphi(1)\right| \cdot \|g\|_{N_{r'\infty}} \le c \left|\varphi(1)\right| \cdot \|g\|_{N_{r's'}} \le c \left|\varphi(1)\right| \cdot \|b\|_{l_{rs'}}.$$

Теперь оценим второе слагаемое:

$$\left| \int_0^1 \int_0^x g(s)\,ds\,d\varphi \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \int_0^x g(s)\,ds\,d\varphi \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \overline{g}_k 2^{-k} \mathop{V}_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi \le c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{r'}} \overline{g}_k \right)^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{r}} \mathop{V}_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi \right)^{s} \right)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le c \|g\|_{N_{r's'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{r}} \mathop{V}_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi \right)^{s} \right)^{\frac{1}{s}} \le c \|b\|_{l_{rs'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{r}} \mathop{V}_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi \right)^{s} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\|\lambda\|_{l_{r's}} \le c \left[\left|\varphi(1)\right| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{r}} \mathop{V}_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi \right)^{s} \right)^{\frac{1}{s}} \right],$$

из которого, с учетом замечания, получим утверждение теоремы.

Результат теоремы дополняет результаты С.Б.Стечкина [1], И.И.Хиршмана [2] на случай $p_0 < p_1$.

References

1. *Stechkin S.B.* On bilinear forms // DAN SSSR (N.S.). — 71. — 1950. — № 3. — P. 237–240.
2. *Hirshman I.I.* On multiplier transformations / Deke Math.J. 26. 1959 I. — P. 221–242.
3. *Edelstein S.L.* The boundedness of the convolution in $L_p(Z_m)$ and smoothness of the symbol of the operator // Math. notes. — 22. — 1977. — № 6. — P. 873–884.
4. *Birman M.Sh., Solomjak M.Z.* Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory. — Kiev, 1974. — P. 5–189.
5. *Karadzhov G.E.* The trigonometric multiplier problem // Constructive function theory 81. — Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983. — P. 82–86.
6. *Smailov E.S., Tleukhanova N.T.* Estimates of the number of integral convolution operator // Abstracts of the Scientific Conference «Boundary-value problems and spectral problems for differential equations». — Almaty, 1991. — P. 140.
7. *Tleukhanova N.T.* The trigonometric problem of multipliers // Modern problems of function theory and functional analysis. — Karaganda, 1988. — P. 129–134.
8. *Nursultanov E.D.* Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Mathematics. — 189. — № 3. —1998. — P. 83–112.