

Бастапқы нүкте:  $u_0 = 1$

Қадам:  $t = 0.001$

Нәтижесі:

Бастапқы кесінді  $[a,b] = [3.05, 9.19]$

Асыра артық алу әдісі:

$x^* = 4.497000$ ,  $f(x^*) = -4.820544$ ,  $R = 0.0081$

Дихотомия әдісі:

$x^* = 4.512309$ ,  $f(x^*) = -4.819787$ ,  $R = 0.0086$

Фибоначчи әдісі:

$x^* = 4.497667$ ,  $f(x^*) = -4.820533$ ,  $R = 0.0139$

«Алтын қима» әдісі:

$x^* = 4.506942$ ,  $f(x^*) = -4.820170$ ,  $R = 0.0132$

*Қорытынды.* Тиімділіктің критерийі болып анықталмағандық интервалының азаюы сипаттамасы, яғни  $R(N)$ , табылады. Тиімді деп «алтын қима» мен Фибоначчи әдістерін санауға негіз бар. Асыра артық алу әдісі баяу жинақталады.

### Әдебиеттер тізімі

1. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 2002. — 542 с.
2. Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы / Под ред. А.В.Ефимова. — М.: Наука, 1984. — 301 с.
3. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных. — М.: Мир, 1989. — 360 с.
4. *Культин Н.Б.* Программирование в Turbo Pascal 7.0 и Delphi. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ–Санкт-Петербург, 1999. — 416 с.

УДК 517.43

А.Б.Шырақбаев

Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им. А.Ясауи

### АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

*Мақалада нұқсанды эллипстік түрдегі теңдеудің бір класы үшін жартылайпериодты Дирихле (ЖПД) есебінің бар болу теоремасы және жатықтығы дәлелденген. ЖПД теорема шешімімен байланысты жиынның Колмогоров көлденеңдерінің екі жақты бағасы туралы теорема алынған. Қорытынды нәтижелер механикада, газдинамикада және математика, физиканың басқа салаларында қолданыс табады.*

*The theorems are demonstrated about existence of smooth decisions of Dirichle's (DSP) semi-periodical problem for for one class innating elliptical equation in this work. With the help of this theorem, double-sided estimations of diameter are got according to Kolmogorov's multitudes tired bu DSP problems. The given results of problem are used in mechanics, gaure dynamics and in other the fields of mathematics and physics.*

#### Введение

В области  $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, 0 < y < 1\}$  рассмотрим задачу

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u_x + c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u = f(x, y), \quad (0.1)$$

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y), \quad u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y), \quad (0.2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (0.3)$$

где  $f \in L_2(\Omega)$ . Всюду в этой работе считаем, что  $k(y)$  — кусочно-непрерывная функция на  $[0, 1]$ ,  $k(0) = 0$ , а функции  $a(y, z)$ ,  $c(y, z)$  являются непрерывными по аргументам и ограниченными.

Уравнение (0.1) является нелинейным уравнением вырождающегося эллиптического типа.

Со спектральными вопросами для дифференциального оператора  $L$ , заданного в пространстве  $L_2(\Omega)$ , тесно связана задача об оценке  $k$ -поперечников (по Колмогорову)  $d_k(M)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) множества

$$M = \{u \in D(L) : \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\},$$

определяемых как

$$d_k(M) = \inf_{\{Z_k\}_{u \in M}} \sup_{w \in Z_k} \|w - u\|_{L_2(\Omega)},$$

где  $D(\cdot)$  — область определения,  $Z_k$  — подпространства  $L_2(\Omega)$ , имеющие размерность  $k$ . Для самосопряженного оператора  $L$  с вполне непрерывными обратными  $L^{-1}$  поперечники  $d_k(M)$  совпадают с собственными числами  $\lambda_k$  оператора  $L^{-1}$ , для других линейных операторов — с их аппроксимативными числами. Оценки поперечников  $d_k(M)$  позволяют установить более тонкие, чем компактность, свойства резольвенты оператора  $L$  и служат основой для определения качества аппроксимации операторного (необязательно линейного) уравнения  $Lu = f$  при приближенном решении его. Обзоры работ, посвященных оценкам поперечников множеств, в том числе связанных с областями определения линейных эллиптических операторов, приведены в [1–2]. В неэллиптическом случае вопрос об оценке поперечников исследован лишь для отдельных классов линейных дифференциальных операторов [3–8].

Цель настоящей работы — установление оценок сверху и снизу для поперечников по Колмогорову множества решений нелинейной краевой задачи (0.1)–(0.3), соответствующих правым частям  $f$  из единичного шара в  $L_2(\Omega)$ .

В разделе 1 доказано основное неравенство для решения линейной задачи, соответствующей (0.1)–(0.3) (случай  $a(y, z) = a(y)$ ,  $c(y, z) = c(y)$ ), а в разделе 2 теорема существования сильного решения нелинейной задачи (0.1)–(0.3). Оценки поперечников  $d_k(M)$  множества

$$M = \{u \in D(L) : \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\}$$

установлены в разделе 3.

### 1. Основное неравенство для решения линейной задачи

Через  $C([0; 1], L_2(-\pi, \pi))$  обозначим пространство, полученное пополнением множества непрерывных на промежутке  $[0; 1]$  функций со значениями в  $L_2(-\pi, \pi)$  относительно нормы

$$\|u\|_{C([0; 1], L_2)} = \sup_{y \in [0, 1]} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

а  $W_2^1(\Omega)$  означает пространство С.Л.Соболева с нормой

$$\|u\|_{2,1,\Omega} = \left[ \|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right]^{1/2},$$

$\|\cdot\|$  — норма в  $L_2(\Omega)$ .

Рассмотрим уравнение

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.1)$$

Здесь  $c(y)$  — кусочно-непрерывная на отрезке  $[0; 1]$  функция,  $k(y)$  такая же, как и раньше, через  $C, C_1, C_2$  и т.д. обозначим положительные постоянные, вообще говоря разные в разных местах. Пусть  $C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$  — класс сколь угодно раз дифференцируемых на множестве  $\Omega$  и удовлетворяющих условиям (0.2)–(0.3) функций.

Замыкание по норме пространства  $L_2(\Omega)$  выражения (1.1), определенного на множестве  $C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$ , будем также обозначать через  $L$ .

**Определение.** Решением задачи (1.1), (0.2), (0.3) назовём функцию  $u(x, y)$  из  $L_2(\Omega)$ , для которой найдется последовательность  $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$  из  $C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$ , удовлетворяющая условиям  $\|u_k - u\|_2 \rightarrow 0$ ,  $\|Lu_k - f\|_2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть функции  $a(y)$ ,  $c(y)$  непрерывны и удовлетворяют условию

$$|a(y)| \geq \delta_0 > 0, \quad c(y) \geq \delta > 0. \quad (i)$$

Тогда для любой правой части  $f \in L_2(\Omega)$  существует единственное решение  $u(x, y)$  задачи (1.1), (0.2), (0.3), такое что

$$\|u\|_{C([0;1], L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C_0 \|f\|_2. \quad (1.2)$$

Прежде чем доказать эту теорему, приведем некоторые вспомогательные утверждения. В леммах 1.1–1.4, сформулированных ниже, считаем выполненными предположения теоремы 1 относительно коэффициентов  $a(y)$  и  $c(y)$  уравнения (1.1).

**Лемма 1.1.** Для всех  $u \in D(L)$  имеет место оценка

$$\|Lu\|_2 \geq C \|u\|_2. \quad (1.3)$$

**Доказательство.** Пусть  $u \in C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$ . Интегрируя по частям и учитывая граничные условия, получим:

$$\langle Lu, u \rangle = \int_{\Omega} (Lu)u \, dx dy \geq \int_{\Omega} (u_y^2 + c(y)u^2) \, dx dy + \int_{\Omega} k(y)u_x^2 \, dx dy,$$

и

$$\langle Lu, u_x \rangle = \int_{\Omega} a(y)u_x^2 \, dx dy.$$

Из этих соотношений, применяя неравенство Коши с  $\varepsilon$  и пользуясь условием (i), при некотором  $C$  получим оценку (1.3). Лемма доказана.

Через  $l_n$  обозначим замыкание в норме пространства  $L_2(0;1)$  оператора

$$l_n \vartheta(y) = -\vartheta'' + (n^2 k(y) + ina(y) + c(y))\vartheta \quad (n = 0, +1, \pm 2, \dots),$$

определенного на множестве  $C_0^\infty[0,1]$ , где  $C_0^\infty(0;1)$  — множество дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию  $u(0) = u(1) = 0$ .

**Лемма 1.2.** Для всех функций  $\vartheta(y)$  из  $D(l_n)$  справедливы следующие оценки:

$$\|l_n \vartheta\|_{L_2(0;1)} \geq C_1 \left[ \|\vartheta'\|_{L_2(0;1)} + \|\vartheta\|_{L_2(0;1)} \right], \quad (1.4)$$

$$\|l_n v\|_{L_2(0;1)} \geq C_2 \|v\|_{C[0;1]}, \quad (1.5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные числа.

**Доказательство.** Составим квадратичную форму  $(l_n \vartheta, \vartheta)$ ,  $\vartheta \in C_0^\infty[0,1]$ . Интегрируя по частям, получим:

$$|(l_n \vartheta, \vartheta)| = \left| \int_0^1 (l_n \vartheta) \bar{\vartheta} \, dy \right| = \left| \int_0^1 \left[ |\vartheta'|^2 + (n^2 k(y) + ina(y) + c(y)) |\vartheta|^2 \right] dy \right|.$$

Отсюда, используя неравенство  $|\alpha + i\beta| \geq \max(|\alpha|, |\beta|)$  ( $\alpha, \beta \in R$ ), неравенство Шварца и неравенство Коши с  $\varepsilon$ , имеем:

$$\|l_n v\|_{L_2(0;1)}^2 \geq n^2 \delta^2 \|v\|_{L_2(0;1)}^2, \quad (1.6)$$

$$C \|l_n v\|_{L_2(0;1)}^2 \geq C_3 \int_0^1 \left[ |v'|^2 + c(y)|v|^2 \right] dy + \int_0^1 n^2 k(y) |v|^2 dy. \quad (1.7)$$

Из неравенства (1.7), учитывая, что  $k(y) \geq 0$ , имеем:

$$\|l_n v\|_{L_2(0,1)}^2 \geq C_4 (\|v\|_{L_2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L_2(0,1)}^2) \geq C_1 \|u\|_{W_2^1(0,1)}^2.$$

Отсюда, так как оператор вложения пространства  $W_2^1(0,1)$  С.Л.Соболева в класс  $C[0,1]$  непрерывных на  $[0,1]$  функций ограничен, вытекает оценка  $\|l_n \vartheta\|_{L_2(0,1)} \geq C_2 \|v\|_{C[0,1]}$ , которая остается верной для всех функций  $u \in D(l_n)$ . Лемма доказана.

**Лемма 1.3.** Оператор  $l_n$  непрерывно обратим.

**Доказательство.** С учетом неравенства (1.4) достаточно показать плотность множества  $l_n D(l_n)$  в пространстве  $L_2(0;1)$ . Допустим противное, пусть множество  $l_n D(l_n)$  неплотно в  $L_2(0;1)$ . Тогда согласно общей теории линейных операторов найдется ненулевой элемент  $w \in L_2(0;1)$ , такой что  $(l_n u, w) = 0$  для всех  $u$  из  $D(l_n)$ . Отсюда, так как  $D(l_n)$  плотно в  $L_2(0;1)$ , получим, что  $w$  — решение уравнения  $l_n^* w = -w'' + (n^2 k(y) + c(y))w = 0$ . Из этого равенства, ввиду непрерывности коэффициентов на отрезке  $[0;1]$ , вытекает, что  $w'' \in L_2(0;1)$ . Покажем, что  $w(y)$  удовлетворяет условиям  $w(0) = w(1) = 0$ . Действительно, путем интегрирования по частям для всех  $u \in D(l_n)$  имеем

$$0 = (u, l_n^* w) = (l_n u, w) - u'(1)\bar{w}(1) + u'(0)\bar{w}(0),$$

что выполнено только тогда, когда  $w(0) = w(1) = 0$ . Следовательно,  $w \in D(l_n)$ , тогда, поступив аналогично доказательству оценки (1.4), получаем неравенство  $\|l_n w\|_{L_2(0,1)} \geq C \|w\|_{L_2(0,1)}$ , показывающее, что  $w = 0$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 1.4.** Для нормы оператора  $l_n^{-1}$ , обратного к  $l_n$ , справедлива оценка

$$\|l_n^{-1}\|_{L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)} \leq \frac{1}{|n|\delta_0}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Доказательство.** Для любой функции  $u \in C_0^\infty[0,1]$ , учитывая условие  $i)$  в теореме 1, имеем:

$$|(l_n u, u)| \geq \left| \int_0^1 i n a(y) |u|^2 dy \right| \geq |n|\delta_0 \|u\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем оценку:

$$\|l_n u\|_{L_2(0,1)} \geq |n|\delta_0 \|u\|_{L_2(0,1)},$$

из которой следует утверждение леммы.

**Доказательство теоремы 1.** Оператор, обратный к  $l_n$ , обозначим через  $l_n^{-1}$ . Существование и непрерывность  $l_n^{-1}$  вытекает из леммы 1.3. Пусть  $u_n(y) = (l_n^{-1} f_n)(y)$ . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$U_k(x, y) = \sum_{n=-k}^k u_n(y) \exp(inx) = \sum_{n=-k}^k (l_n^{-1} f_n)(y) \exp(inx)$$

является решением уравнения (1.1) с правой частью

$$F_k(x, y) = \sum_{n=-k}^k f_n(y) \exp(inx),$$

удовлетворяющим условиям (0.2), (0.3), причем справедливо равенство

$$\|U_k(x, y)\|_{L_2(-\pi; \pi)}^2 = 2\pi \sum_{n=-k}^k |u_n(y)|^2.$$

Тогда из оценки (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0;1]} \|U_k(x, y)\|_{L_2(-\pi; \pi)}^2 &= 2\pi \sum_{n=-k}^k \sup_{y \in [0;1]} |u_n(y)|^2 \leq \\ &\leq C_1 2\pi \sum_{n=-k}^k \|l_n u\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_2 2\pi \sum_{n=-k}^k \|f_n(y)\|_{L_2(0,1)}^2 = C \|F_k(x, y)\|_2^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из леммы 1.4 имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial U_k(x, y)}{\partial x} \right\|_2^2 &= \left\| \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-k}^k (I_n^{-1} f_n)(y) e^{inx} \right\|_2^2 = \left\| in \sum_{n=-k}^k (I_n^{-1} f_n)(y) e^{inx} \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=-k}^k |n|^2 \|I_n^{-1}\|_{L_2(0;1) \rightarrow L_2(0;1)}^2 \|f_n\|_{L_2(0;1)}^2 \leq \frac{1}{\delta_0^2} \sum_{n=-k}^k \|f_n\|_{L_2(0;1)}^2 = \frac{1}{\delta_0^2} \|F_k(x, y)\|_2^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Аналогично, используя оценки (1.4), (1.5), получим:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial U_k(x, y)}{\partial y} \right\|_2^2 + \|U_k\|_2^2 &= \left\| \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-k}^k (I_n^{-1} f_n)(y) e^{inx} \right\|_2^2 + \left\| \sum_{n=-k}^k (I_n^{-1} f_n)(y) e^{inx} \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=-k}^k \|f_n\|_2^2 + \sum_{n=-k}^k \|f_n\|_2^2 \leq 2 \|F_k(x, y)\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Известно, что множество функций

$$F_k(x, y) = \sum_{n=-k}^k f_n(y) \exp(inx) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

плотно в  $L_2(\Omega)$ , поэтому можно считать, что  $\|F_k(x, y) - f(x, y)\|_2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда последовательность  $\{F_k\}_{k=1}^\infty$  фундаментальна, и в силу оценок (1.8)–(1.10)

$$\begin{aligned} \|U_k(x, y) - U_m(x, y)\|_{C([0;1], L_2)} + \|U_k(x, y) - U_m(x, y)\|_{2,1,\Omega} &\leq \\ &\leq C_6 \|F_k(x, y) - F_m(x, y)\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $k, m \rightarrow \infty$ . Отсюда, так как пространства  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$  и  $W_2^1(\Omega)$  полные, вытекает, что последовательность  $\{U_n(x, y)\}_{n=-\infty}^\infty$  имеет предел  $u(x, y)$ , для которого, в силу (1.8)–(1.10), справедлива оценка

$$\|u\|_{C([0;1], L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C \|f\|_2.$$

Теорема доказана.

## 2. Существование решения нелинейной задачи

**Теорема 2.** Пусть в уравнении (0.1) выполнено условие

$$|a(y, z)| \geq \delta_0 > 0, \quad c(y, z) \geq \delta_0 > 0. \quad (i_0)$$

Тогда существует решение  $u(x, y)$  задачи (0.1)–(0.3), такое что

$$\|u\|_{C([0;1], L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C \|f\|_2. \quad (2.1)$$

Сначала докажем несколько лемм.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_v u = -k(y) u_{xx} - u_{yy} + a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) u_x + c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.2)$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $v(x, y)$  — некоторая функция из класса  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$  и выполнено условие  $(i_0)$ . Тогда для любой правой части  $f$  из  $L_2(\Omega)$  существует, и притом единственное, решение задачи (2.2), (0.2), (0.3) такое, что

$$\|u\|_{C([0;1], L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C \|f\|_2. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Положим

$$\tilde{a}(y) = a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right), \quad \tilde{c}(y) = c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right).$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид (1.1), где коэффициенты  $a(y)$ ,  $c(y)$  заменены соответственно на  $\tilde{a}(y)$ ,  $\tilde{c}(y)$ . Согласно нашим предположениям относительно  $a(y, z)$  для функций  $\tilde{a}(y)$ ,  $\tilde{c}(y)$  выполнены все условия теоремы 1, откуда вытекает доказываемая лемма.

Таким образом, задача (2.2), (0.2) (0.3) имеет единственное решение  $u = L_v^{-1} f \in C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ , удовлетворяющее оценке (2.3). Для каждой функции  $v \in C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$  функция  $u = L_v^{-1} f$  принад-

лежит области определения  $D(L)$  оператора  $L$  краевой задачи (0.1)–(0.3). Поэтому существование решения задачи (0.1)–(0.3) эквивалентно существованию неподвижной точки оператора  $L_v^{-1}$  в пространстве  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ , т.е. существованию функции  $u \in C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ , такой что  $u = L_u^{-1}f$ . При этом  $u \in D(L)$ , поскольку  $L_v^{-1}f \in D(L)$  при любых  $v$  из  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ .

Для нахождения неподвижной точки оператора  $L_v^{-1}$  применим известный принцип Шаудера. Пусть

$$\bar{S} = \left\{ v \in C([0,1], L_2) : \|v\|_{C([0,1], L_2)} \leq A \right\} —$$

шар в пространстве  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$  и  $A$  — произвольное положительное число. Если радиус  $A$  шара  $\bar{S}$  выбрать равным правой части  $C\|f\|_2$  неравенства (2.3), то из теоремы 1 и леммы 2.1 следует, что оператор  $L_v^{-1}$  отображает множество  $\bar{S}$  в себя.

Пусть

$$M = \left\{ u \in C([0,1], L_2) : u = L_v^{-1}f, \exists \bar{S}, f \in L_2(\Omega) \right\} —$$

образ шара  $\bar{S}$  при отображении  $L_v^{-1}$ . Из леммы 2.1 вытекает, что для любой функции  $u$  из  $M$  справедливо неравенство

$$\|u\|_{C([0,1], L_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega} \leq C\|f\|_2.$$

Покажем, что оператор  $L_v^{-1}$  является вполне непрерывным в пространстве  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ . Рассмотрим множество

$$N_f = \left\{ u \in C([0,1], L_2(-\pi, \pi)) : \|u(x, y)\|_{C([0,1], L_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega} \leq C\|f\|_2 \right\},$$

$$K_f = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \|u\|_{1,2,\Omega} \leq C\|f\|_2 \right\}.$$

Очевидно,

$$M \subset N_f \subset K_f. \quad (2.4)$$

Пусть  $N_{f,h}, K_{f,h}$  — множество, состоящее соответственно из функций вида

$$u_h = \int_{r < h} w_h(|x-y|)u(y)dy, \quad v_h = \int_{r < h} w_h(|x-y|)v(y)dy, \quad r = |x-y|,$$

где  $u \in N_f$ ,  $v \in K_f$ , а  $w_h(r)$  — усредняющее ядро. Известно, что функция  $w_h(r)$  бесконечно дифференцируема;

$$w_h(r) > 0 \text{ при } r < h, \quad w_h(r) = 0 \text{ при } r \geq h;$$

$$\int_{r < h} w_h(r)dy = \int_{r < h} w(r)dx = 1.$$

Покажем, что множество  $N_{f,h}$  компактно в пространстве  $C(\bar{\Omega})$ . С учетом соотношений (2.4) легко проверяется справедливость включения

$$N_{f,h} \subset K_{f,h}. \quad (2.5)$$

Известно, при любом фиксированном  $h > 0$  множество  $K_{f,h}$  компактно в  $C(\bar{\Omega})$  [9; 123]. Тогда согласно (2.5) множество  $N_{f,h}$  компактно в  $C(\bar{\Omega})$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.2.** Если выполнено условие  $i_o)$ , то множество  $M$  компактно в пространстве  $C([0;1], L(-\pi; \pi))$ .

**Доказательство.** Мы уже убедились в том, что множество  $N_{f,h}$  компактно в  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ . Тогда согласно следствию теоремы 2 из [9; 123] множество  $N_f$  также компактно в  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ . Теперь доказываемая лемма следует из включения  $M \subset N_f$ .

**Лемма 2.3.** Пусть выполнено условие  $i_o)$ . Тогда оператор  $L_v^{-1}$  непрерывен.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — фиксированный элемент в  $L_2(\Omega)$ , последовательность  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  и элемент  $v$  из множества  $\bar{S}$  такие, что  $v_n \rightarrow v$  в норме пространства  $C([0;1], L_2(-\pi, \pi))$ . Положим  $L_v u = f$ ,  $L_{v_n} u_n = f$ . Тогда

$$\begin{aligned} & -k(y)(u_{nxx} - u_{xx}) - (u_{nyy} - u_{yy}) + a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) u_{nx} + c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) u_n - \\ & - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) u - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) u_x = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -k(y)(u_{nxx} - u_{xx}) - (u_{nyy} - u_{yy}) + \\ & a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) (u_{nx} - u_x) + c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) (u_n - u) = \\ & = \left( a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u_x + \\ & + \left( c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Левая часть последнего равенства имеет вид:

$$L_{v_n}(u_n - u).$$

По предположению, коэффициенты оператора  $L_{v_n}$  удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, существует обратный оператор  $L_{v_n}^{-1}$ . Тогда из (2.6) имеем

$$u_n - u = L_{v_n}^{-1} \left[ \left( a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u_x + \left( c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C([0;1], L_2(-\pi, \pi))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_{v_n}^{-1} \left[ \left( a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u_x + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right) u \right] \right\|_{C([0;1], L_2(-\pi, \pi))}. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 1, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C([0;1], L_2)} &\leq \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_{v_n}^{-1} \right\|_{C([0;1], L_2) \rightarrow C([0;1], L_2)} \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ \sup_{y \in [0;1]} \left| a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right| \|u_x\|_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \sup_{y \in [0;1]} \left| c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) \right| \|u\|_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$$\left\| L_{v_n}^{-1} f \right\|_{C([0;1], L_2) \rightarrow C([0;1], L_2)} \leq C \|f\|_2. \quad (2.8)$$

для всех  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $v$ . Из неравенства (2.3) получим оценки:

$$\|u_x\|_2 \leq C \|f\|_2, \quad (2.9)$$

$$\|u\|_2 \leq C \|f\|_2. \quad (2.10)$$

Учитывая оценки (2.8)-(2.10), из оценки (2.7) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C([0,1], L_2)} &\leq C^2 \|f\|_2^2 \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0,1]} \left| a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) - a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) \right| \right] + \\ &+ \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0,1]} \left| c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x, y) dx \right) - c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dx \right) \right| \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\|v_n - v\|_{C([0,1], L_2)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Неравенство (2.11) доказывает лемму.

**Доказательство теоремы 2.** Согласно леммам 2.2, 2.3 оператор  $L_9^{-1}$  вполне непрерывен и переводит шар  $\bar{S}$  в себя. Тогда, согласно принципу Шаудера, оператор  $L_9^{-1}$  имеет неподвижную точку  $u$  в шаре  $\bar{S}$ . Это означает, что задача (0.1)-(0.3) для любой правой части  $f \in L_2(\Omega)$  имеет решение  $u(x, y)$ , принадлежащее шару  $\bar{S}$ , причем верна оценка  $\|u\|_{C([0,1], L_2(-\pi, \pi))} + \|u\|_{1,2,\Omega} \leq C(A)\|f\|_2$ . Теорема доказана.

### 3. Оценки поперечников $d_k(M)$

Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u_x + c \left( y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u.$$

При выполнении условия  $(i_0)$  из теоремы 2 и леммы 2.2. следует компактность в  $L_2(\Omega)$  множества

$$M = \{u \in D(L) : \|Lu\|_2 + \|u\|_2 \leq 1\},$$

которое является частью области определения  $L$ . Для компактного множества  $M$ , тем более когда оно содержит решения дифференциального уравнения, содержательна задача об оценке его поперечников  $d_k(M)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условие  $(i_0)$  и

$$\sup_{z \in C} \sup_{y \in [0,1]} |a(y, z)| < \infty, \quad \sup_{z \in C} \sup_{y \in [0,1]} c(y, z) < \infty. \quad (i_0 i_1)$$

Тогда для поперечников  $d_k$  по Колмогорову множества  $M$  справедливы оценки

$$C_0^{-1} \frac{1}{k} \leq d_k \leq C_0 \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $C_0 > 0$  не зависит от  $k$ .

Для доказательства теоремы нам необходимы некоторые леммы и оценки. Введем множества

$$\tilde{M}_s = \left\{ u \in C([0,1], L_2(-\pi, \pi)) : \left( \|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq s \right\}$$

$$M_p = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \left( \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq p \right\}.$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.1.** Пусть выполнены условия  $(i_0) - (i_0 i_1)$ . Тогда для некоторой постоянной  $C_1 > 1$  справедливы включения

$$M_{C_1^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_{C_1}.$$

**Доказательство.** Пусть  $u(x, y) \in M_{C_1^{-1}}$ ,

$$C_2 = \sup_{z \in C} \max_{y \in [0,1]} \{ |k(y)|, |a(y, z)|, |c(y, z)| \}.$$

Тогда с учетом условия  $(i_o i_o)$  получим

$$\begin{aligned} \|Lu\|_2^2 + \|u\|_2^2 &\leq C_2 \left( \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_3 \left( \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C_0^{-1} C_3. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая  $C_o = C_3^{-1}$ , имеем  $M_{C_0^{-1}} \subseteq M$ .

Пусть теперь  $u \in M$ . Тогда из теоремы 2 следует

$$\left( \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C \left( \|Lu\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right) \leq C,$$

т.е.  $M \subseteq \tilde{M}_C$ . Выбрав постоянную  $C_1$  так, что  $C_1 \geq C$  и  $C_1^{-1} \leq C_0^{-1}$ , получим утверждение леммы. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Пусть выполнены условия  $(i_o) - (i_o i_o)$ . Тогда справедливы оценки

$$C^{-1} d_k \leq d_k \leq C \tilde{d}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная,  $\tilde{d}_k, d_k - k$  — поперечники соответственно множеств  $\tilde{M}_C, M_{C^{-1}}$ .

Введем функции

$$N(\lambda) = \sum_{d_k > \lambda} 1, \quad \tilde{N}(\lambda) = \sum_{\tilde{d}_k > \lambda} 1, \quad \dot{N}(\lambda) = \sum_{\dot{d}_k > \lambda} 1,$$

равные соответственно количеством поперечников  $d_k(M), \tilde{d}_k$  и  $\dot{d}_k$ , больших  $\lambda > 0$ . Из оценок (3.1) легко вытекают неравенства

$$\dot{N}(C\lambda) \leq N(\lambda) \leq \tilde{N}(C^{-1}\lambda).$$

**Доказательство теоремы 3.** Известно, что для функции  $\tilde{N}(\lambda)$  и  $\dot{N}(\lambda)$  справедливы оценки [10]:

$$C_0^{-1} \lambda^{-2} \leq \tilde{N}(\lambda) \leq C_0 \lambda^{-2},$$

$$C_0^{-1} \lambda^{-1} \leq \dot{N}(\lambda) \leq C_0 \lambda^{-1}.$$

Пусть  $\lambda = \tilde{d}_k$ , тогда  $\tilde{N}(\tilde{d}_k) = k$ . Поэтому из (3.2) и (3.3), соответственно, вытекают неравенства

$$C_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \tilde{d}_k \leq C_0 \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad C_0^{-1} \frac{1}{k} \leq d_k \leq C_0 \frac{1}{k},$$

Отсюда, с учетом оценок (3.1), получаем доказательство теоремы.

#### Список литературы

1. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Известия вузов. Сер. матем. — 1989. — № 3. — С. 44–47.
2. Муратбеков М.Б. Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора Шредингера // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 6. — С. 1034–1042.
3. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Осанов К.Н. Об аппроксимативных свойствах решения нелинейного уравнения смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. — МГУ. — 2006. — Т. 12. — № 5. — С. 95–107.
4. Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — С. 286.
5. Муратбеков М.Б. Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора Шредингера // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 6. — С. 1034–1042.
6. Муратбеков М.Б. О гладкости решений одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 5. — С. 71–73.
7. Муратбеков М.Б. О гладкости решений одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск, 1981. — С. 144–146.
8. Муратбеков М.Б. Разделимость и спектр дифференциальных операторов смешанного типа. — Тараз, 2006. — С. 163.
9. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
10. Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИАН СССР. — 1979. — Т. 150. — С. 265.