УДК 330.46

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov_r@inbox.ru)

Изучение многошаговых экономических задач и разработка методов их решения как предмет динамического программирования

Показано, что динамическое программирование является новым разделом прикладной математики, занимающейся анализом и разработкой численных методов решения различных экстремальных задач. Доказано, что пошаговое представление экономического процесса позволяет существенно упростить решение сложных задач. Отмечено, что задачи динамического программирования допускают использование функциональных уравнений, являющихся точной записью принципа оптимальности Ричарда Беллмана. Раскрыты возможности применения динамического программирования для решения задач по оптимальному распределению ресурсов в горной промышленности. Предложен алгоритм решения задачи оптимального распределения капитальных вложений между угледобывающими предприятиями методом динамического программирования. Рассмотрено решение проблемы оптимальной политики замены горного оборудования на участке угольной шахты с применением аппарата динамического программирования.

Ключевые слова: динамическое программирование, оптимизация, стратегия, Беллман, аддитивность, функция дохода, ресурс, шахта, предприятие.

Принцип оптимальности Ричарда Беллмана

Сложность и многообразие экономических задач на оптимум обусловливают необходимость применения различных математических методов программирования. В связи с этим значительный интерес представляют методы динамического программирования.

Динамическое программирование является сравнительно новым разделом той отрасли математики, которая занимается анализом и разработкой численных методов решения различных экстремальных задач [1–5].

Основным преимуществом метода динамического программирования, отличающим его от других способов оптимизации, является то, что этот метод предъявляет весьма незначительные требования к свойствам функций, участвующих в формировании задачи (он не требует, например, выпуклости, гладкости функции и т.п.). В отличие от линейного программирования, этот метод не зависит от характера целевой функции и не требует линейности исходных ограничений.

Метод динамического программирования применяется, когда исследуемая задача может быть представлена как многоэтапная, т.е. ее можно разделить на ряд последовательных этапов или шагов. Пошаговое представление процесса позволяет существенно упростить решение сложных задач.

Эффективное применение динамического программирования возможно лишь для сравнительно ограниченного количества экстремальных задач ввиду больших требований, предъявляемых в первую очередь к памяти машины. При постановке конкретных задач динамического программирования встречаются трудности, связанные с выбором параметров, характеризующих состояние системы, и разделения процесса на этапы (шаги).

Можно ввести следующие определения задачи динамического программирования.

Поведением принято называть любое правило для принятия решений, которое дает допустимую последовательность решений (стратегию); оптимальным называется поведение, максимизирующее (или минимизирующее) некоторую заранее заданную функцию параметров окончательного состояния (функцию критерия).

Изучение многошаговых задач и разработка методов их решения являются предметом динамического программирования. Задачи, для решения которых предназначен аппарат динамического программирования, называются задачами динамического программирования.

Большой вклад в разработку теории динамического программирования сделал американский математик Ричард Беллман.

Все задачи динамического программирования характеризуются многоэтапностью процессов. Этапы чаще всего относятся к определенным интервалам времени, хотя иногда и необязательно должны означать этапы во времени, и тогда они имеют несколько иной смысл.

Большинство задач динамического программирования обладает свойством аддитивности, это значительно упрощает вычислительный процесс решения. Свойство аддитивности, например для за-

Репозиторий КарГУ

дачи о кратчайшем пути, вытекает из того, что длина пути, состоящего из нескольких отрезков дорог, равна сумме длин этих дорог. Существуют задачи динамического программирования, в которых свойство аддитивности не выполняется.

Свойство независимости оптимального плана от предыстории в задачах динамического программирования является основным. Именно это свойство указывает на то, что данную задачу можно рассматривать с точки зрения динамического программирования, и именно на его основе строится большинство численных методов решения подобных задач. Свойство независимости оптимального поведения от предыстории часто называется принципом оптимальности Беллмана, или просто принципом оптимальности.

Принцип оптимальности заключается в следующем. Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения (Р.Беллман).

Задачи динамического программирования допускают эффективное использование функциональных уравнений, которые являются точной записью принципа оптимальности Р.Беллмана. Основное достоинство функциональных уравнений состоит в том, что решение задач большой размерности сводится к последовательному решению задач с меньшей размерностью.

Метод функциональных уравнений — основной метод решения задач динамического программирования

Одной из типичных задач динамического программирования является задача распределения ограниченных ресурсов при известных функциях дохода. К таким задачам относятся задачи распределения ограниченных капиталовложений, сырья и других ресурсов по различным экономическим единицам (отраслям промышленности, предприятиям). Функции дохода показывают зависимость выигрыша (количество выпущенной продукции, доход от ее продажи, повышение качества и т.д.) от количества выделенных ресурсов.

Функция дохода при расчетах по методу динамического программирования может быть как непрерывной, так и дискретной, т.е. заданной набором точек, что соответствует определенным количествам единиц ресурса, например, в случае распределения таких видов ресурсов, как специалисты различной квалификации, приборы, машины и т.д.

Предположим, что мы располагаем некоторыми ресурсами (денежными средствами, оборудованием и т.п.), которые обозначим через x. Эти ресурсы мы вкладываем в два каких-нибудь предприятия: в первое — y, во второе $x - y$. Пусть в течение определенного периода (например, года) количество y приносит доход $g(y)$, а количество $x - y$ – доход $h(x - y)$. Общий доход от всех вложенных ресурсов составит

$$R_1(x,y) = g(y) + h(x-y).$$

Обозначим через $F_1(x)$ наибольший доход, который могут принести ресурсы x при оптимальном распределении их между предприятиями. Тогда

$$F_1(x) = \max_{0<y<x}\left[g(y)+h(x-y)\right]. \qquad (1)$$

Теперь рассмотрим двухшаговый процесс, состоящий из двух периодов (этапов). Так как получение дохода, являющееся следствием выпуска или реализации продукции, связано с определенными издержками, то к началу второго периода первоначальная сумма y уменьшится до величины ay, где $0 \le a < 1$, а сумма $x - y$ — до величины $b(x - y)$, где $0 \le b < 1$. Наибольший доход, который может быть получен от суммарного остатка $ay + b(x - y)$ в течение второго этапа, равен

$$F_1\left[ay + b(x-y)\right].$$

Обозначим через $F_2(x)$ наибольший доход, который может быть получен от суммы x за оба периода. Этот доход равен максимальному значению суммы доходов первого и второго периодов при условии, что начальные для каждого периода ресурсы распределялись наилучшим образом. Иными словами

$$F_2(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + F_1\left[ay + b(x-y)\right]\right\}. \qquad (2)$$

Равенство (2) устанавливает связь между функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Репозиторий КарГУ

Рассматривая n-шаговый процесс, мы приходим к основному функциональному уравнению Беллмана

$$F_n(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g(y) + h(x-y) + F_{n-1}[ay + b(x-y)] \}, \tag{3}$$

устанавливающему связь между $F_n(x)$ и $F_{n-1}(x)$. Определив с помощью равенства (1) $F_1(x)$, мы, пользуясь (2), вычислим $F_2(x)$, затем $F_3(x)$ и т.д. Значение $F_n(x)$ и дает доход от n-шагового процесса.

Применение динамического программирования для решения задач по оптимальному распределению ресурсов в горной промышленности

При использовании динамического программирования необходимо прежде всего четко поставить задачу, сформулировать критериальную функцию и ограничительные условия, подготовить исходную информацию, определить альтернативы, выбрать метод решения, произвести вычисления, дать анализ и оценку полученному результату.

Постановка задачи предусматривает формулировку цели решения задачи, а также фиксацию состояния объекта управления на момент расчета. Эти данные послужат базой для получения в процессе расчетов новых характеристик, т.е. для моделирования систем.

Современные шахты, рудники, карьеры, обогатительные фабрики представляют собой сложные комплексные предприятия, оснащенные мощной горной техникой. Планирование и управление технологическими процессами, горными предприятиями требуют от руководителя любого ранга умения быстро и правильно принимать различные решения. При этом его функции все более усложняются из-за роста объемов производства, ухудшения горно-геологических условий, дальнейшего развития техники, повышения требований к максимальному использованию недр и охране окружающей среды.

В этих условиях решения, принимаемые на основе личного опыта и инженерной интуиции, зачастую становятся малоэффективными, так как не учитывают целого ряда противодействующих факторов. Современное производство отличается не только размерами и сложностью, затрудняющими принятие решения, но и очень высокой капиталоемкостью, резко повышающей ущерб от ошибок в проектировании, планировании и управлении. Такая ситуация характерна для всей современной экономики, а также и науки, что создает предпосылки для разработки новой технологии принятия решений, основанной на количественных оценках вариантов, исключающей или уменьшающей значение субъективных факторов. Появились условия для применения динамического программирования в основном для решения задач двух классов: планирование (прогнозирование) деятельности экономической системы (горного предприятия) с учетом изменения выпускаемой продукции во времени в соответствии с изменяющейся потребностью и распределение ресурсов по различным направлениям во времени.

Чтобы получить хотя бы общее представление о характере задач, которые решаются методами динамического программирования в горной промышленности, назовем некоторые из них.

К ним относятся, например, задачи, связанные с оптимальным распределением капиталовложений между горнодобывающими предприятиями, задачи о замене горных машин и механизмов, задачи оптимального управления запасами на горных предприятиях, распределением усилий по сбыту полезных ископаемых между различными регионами страны и др.

Оптимальное распределение капитальных вложений между угольными шахтами

Задачи распределения капитальных вложений целесообразно решать методом динамического программирования [6].

Если функция $f(x)$ на интервале (a, b) всюду непрерывна вместе со своими производными I и II порядка и вторая производная функция всюду отрицательна, то график функции на всем интервале строго вогнут к оси ox.

Если в некоторой точке внутри интервала (a, b) первая производная функции обращается в нуль, то в этой точке функция достигает локального максимума, который является и абсолютным максимумом на интервале (a, b). Заметим, что сумма вогнутых функций также вогнутая функция.

Постановка задачи. Требуется распределить ограниченную сумму капитальных вложений, предназначенную для приобретения новой забойной техники, между тремя шахтами АО «АрселорМиттал Темиртау», расположенных на Промышленном и Саранском участках Карагандинского бассейна.

Репозиторий КарГУ

По принятому геолого-промышленному районированию в Карагандинском бассейне выделяются четыре угленосных района: Тентекский и Шерубай-Нуринский — в западной части, Карагандинский — в средней и Верхне-Сокурский — в восточной. В пределах каждого района по характеру угленосности и другим признакам выделяются угленосные участки [7].

Наиболее освоен Карагандинский район, в котором действуют сегодня три шахты: шахта им. Костенко (расположена на Промышленном участке бассейна); две шахты (им. Т.Кузембаева и «Саранская», сосредоточенные на Саранском участке Карагандинского бассейна.

Эффективность капиталовложений по отдельным угольным предприятиям неодинакова. В связи с применением горных машин и механизмов в худших горно-геологических условиях и необходимостью проведения все более дорогостоящих организационно-технических мероприятий по устранению имеющихся диспропорций, эффективность капитальных вложений снижается. Соответствующие эффективности будут при этом выражаться вогнутыми монотонно возрастающими функциями, темпы роста которых снижаются по мере возрастания аргумента.

Эффективности выражаются функциями:

$$q_1(x_1) = 0{,}5\sqrt{x_1} \text{ (шахта им. Костенко);}$$

$$q_2(x_2) = 0{,}6\sqrt{x_2} \text{ (шахта им. Т.Кузембаева);}$$

$$q_3(x_3) = 0{,}4\sqrt{x_3} \text{ (шахта «Саранская»).}$$

Требуется максимизировать

$$R_3(x_1x_2x_3) = 0{,}5\sqrt{x_1} + 0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}4\sqrt{x_3}$$

при условии $x_1 + x_2 + x_3 = x$ и x_1, x_2, $x_3 \ge 0$.

На первый взгляд может показаться, что передача всего ресурса наиболее эффективному II предприятию (шахте им. Т.Кузембаева), где он принесет доход $0{,}6\sqrt{x_2}$, обеспечит максимум. Однако рациональное деление ресурса на части приносит большую эффективность.

Приведем решение задачи с помощью функциональных уравнений:

$$1)\ f_1(x) = q_1(x) = 0{,}5\sqrt{x};$$

$$2)\ f_2(x) = \max R_2(x_1x_2) = \max_{0\le x_2\le x}\left[q_2(x_2) + f_1(x - x_2)\right] =$$

$$= \max_{0\le x_2\le x}\left[0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}5\sqrt{(x - x_2)}\right].$$

Приравняем к нулю производную $\dfrac{dR_2}{dx_2}$:

$$\frac{dR_2}{dx_2} = \frac{0{,}6}{2\sqrt{x_2}} - \frac{0{,}5}{2\sqrt{x - x_2}};$$

$$0{,}3\sqrt{x - x_2} = 0{,}25\sqrt{x_2};$$

$$0{,}09(x - x_2) = 0{,}0625x_2;$$

$$0{,}09x = 0{,}0625x_2 + 0{,}09x_2;$$

$$x_2 = \frac{0{,}09}{0{,}1525}x = \frac{900}{1525}x = \frac{36}{61}x;$$

$$x - x_2 = x - \frac{36}{61}x = x\left(1 - \frac{36}{61}\right) = \frac{25}{61}x.$$

Таким образом, независимо от размера ресурса, предназначенного I и II угольным предприятиям (шахтам им. Костенко и им. Т.Кузембаева), его следует делить в отношении $x_1 : x_2 = 25:36$.

При этом

$$f_2(x) = \left[0{,}6\sqrt{x_2} + 0{,}5\sqrt{x - x_2}\right] = 0{,}6\sqrt{\frac{36}{61}x} + 0{,}5\sqrt{\frac{25}{61}x} =$$

$$= 0{,}6\frac{6}{\sqrt{61}}\sqrt{x} + 0{,}5\frac{5}{\sqrt{61}}\sqrt{x} = \frac{3{,}6 + 2{,}5}{\sqrt{61}}\sqrt{x} =$$

Репозиторий КарГУ

$$= \frac{6,1}{\sqrt{61}}\sqrt{x} = 0,1\frac{61}{\sqrt{61}}\sqrt{x} = 0,1\sqrt{61}\sqrt{x}.$$

$$3)\ f_3(x) = \max R_3(x_1x_2x_3) = \max_{0 \le x_3 \le x}\left[q_3(x_3) + f_2(x - x_3)\right] =$$

$$= \max_{0 \le x_3 \le x}\left[0,4\sqrt{x_3} + 0,1\sqrt{61}\sqrt{x - x_3}\right];$$

$$\frac{dR_3}{dx_3} = \frac{0,4}{2\sqrt{x_3}} - \frac{0,1\sqrt{61}}{2\sqrt{x - x_3}} = \frac{0,2}{\sqrt{x_3}} - \frac{0,05\sqrt{61}}{\sqrt{x - x_3}};$$

$$0,2\sqrt{x - x_3} = 0,05\sqrt{61}\sqrt{x_3};$$

$$\frac{0,4(x - x_3)}{0,025} = 61x_3;$$

$$16(x - x_3) = 61x_3;$$

$$16x = 16x_3 + 61x_3;$$

$$x_3 = \frac{16}{77}x;$$

$$x - x_3 = x - \frac{16}{77}x = \frac{61}{77}x.$$

Следовательно, III предприятию (шахте «Саранская») следует выделить $\frac{16}{77}$ всего ресурса (капиталовложений), а I и II (шахтам им. Костенко и им. Т.Кузембаева) — $\frac{61}{77}$ части.

При этом суммарный эффект будет

$$f_3(x) = 0,4\sqrt{\frac{16}{17}x} + 0,1\sqrt{61}\sqrt{\frac{61}{77}x} = \frac{1,6 + 6,1}{\sqrt{77}}\sqrt{x} = 0,1\sqrt{77}\sqrt{x} = 0,8775\sqrt{x}.$$

Обратный ход. Распределим $\frac{61}{77}x$ между I и II угледобывающими предприятиями (между шахтами им. Костенко и им. Т.Кузембаева) в отношении 25:36:

$$x_1 = \frac{25}{61}\cdot\frac{61}{77}x = \frac{25}{77}x$$

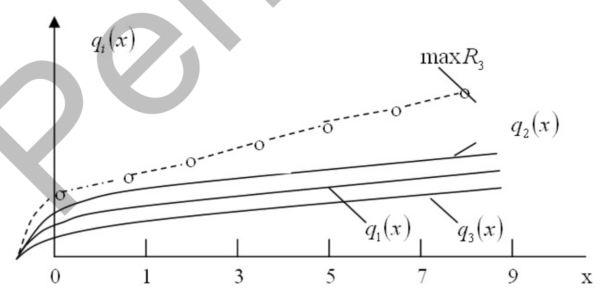
и

$$x_2 = \frac{36}{61}\cdot\frac{61}{77}x = \frac{36}{77}x.$$

Таким образом, при любом размере ресурса оптимальное поведение состоит в делении его на части

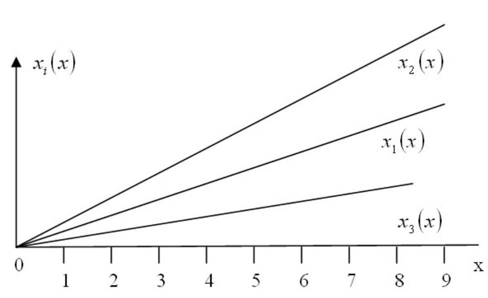
$$x_1 : x_2 : x_3 = 25 : 36 : 16.$$

Графики функций эффективности и оптимального поведения показаны на рисунках 1 и 2.



Примечание. Составлен по данным исследований автора.

Рисунок 1. График функций эффективности



Примечание. Составлен по данным исследований автора.

Рисунок 2. График оптимального поведения

Репозиторий КарГУ

Проблема оптимальной политики замены горно-шахтного оборудования

Одной из важных проблем, с которой приходится встречаться почти во всех отраслях производственной деятельности — в промышленности и науке, на транспорте, в торговле, сельском хозяйстве и т.д. — является проблема оптимальной политики замены оборудования. Суть ее состоит в том, что в каждом конкретном случае надо уметь определить такой момент, когда выгоднее купить новое оборудование, чем эксплуатировать старое.

Критерии, используемые для определения оптимальности в замене оборудования, могут быть весьма различными. Например, в промышленности обычный критерий, используемый для определения оптимальной политики замены оборудования, состоит в минимизации ожидаемых затрат или максимизации ожидаемой прибыли за некоторый промежуток времени. Часто в задачах о замене оборудования важным фактором является технический прогресс. В большей или меньшей степени этот фактор также может учитываться, однако зачастую это оказывается сделать трудно по той причине, что результаты технического прогресса невозможно точно предсказать.

В свете реализации Государственной программы форсированного индустриально-инновационного развития (ГП ФИИР) на 2010–2014 гг. на шахте «Тентекская» угольного департамента (УД) АО «АрселорМиттал Темиртау» к началу пятилетия (2010–2014 гг.) на вспомогательном участке установлено новое горное оборудование. Исходные данные для решения данной задачи приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для решения задачи о замене горного оборудования на вспомогательном участке шахты «Тентекская» УД АО «АрселорМиттал Темиртау»

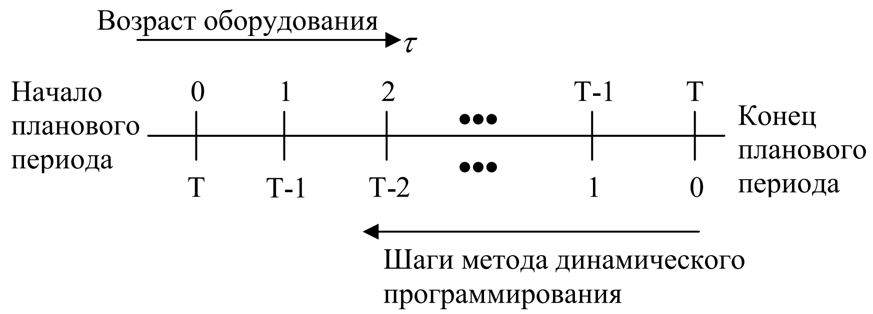
Стоимостные показатели эксплуатации горного оборудования на шахте	Время τ, в течение которого используется горно-шахтное оборудование, лет					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции (добычи угля) в стоимостном выражении, млн. тенге	30	30	24	21	19	16
Ежегодные затраты на содержание и ремонт горно-шахтного оборудования, млн. тенге	11	12	12	13	13	13

Затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, p = 14 млн. тенге. Заменяемое оборудование списывается. Необходимо составить такой план замены оборудования, при котором общая прибыль за пятилетний период (2010–2014 гг.) была бы максимальна.

Имеем два варианта решений: о сохранении оборудования и замене оборудования. Задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми в начале каждого года, при которой общая прибыль вспомогательного участка рассматриваемой шахты Карагандинского бассейна за 2010–2014 гг. была бы максимальной. Для решения поставленной задачи следует применить принцип Р.Беллмана.

Рассмотрим годы от конца к началу. Введем функцию условно-оптимальных значений критерия оптимальности $F_k(\tau)$, которая показывает максимальную величину прибыли, получаемой от эксплуатации оборудования возраста τ лет за последние k лет планового периода. Возраст оборудования рассматривается в направлении естественного хода времени, т.е. $\tau = 0$ соответствует использованию нового оборудования. Временные шаги нумеруются в обратном порядке, т.е. при k=1 рассматривается последний год планового периода (2014 г.). Направления изменения τ и k показаны на рисунке 3.

Репозиторий КарГУ



Примечание. Предлагается автором на основе логики решаемой задачи.

Рисунок 3. Схематичное изображение направления изменения возраста горно-шахтного оборудования и шагов метода динамического программирования

Из рисунка видно, что процесс решения начинается с последнего периода. На начало последнего года, т.е. для k=1, сделаем всевозможные предположения. Предположим, что при k=1 возраст оборудования равен τ лет. В начале T-го интервала имеется две возможности: заменить оборудование или сохранить его.

Если оборудование сохраняется, то прибыль в период T составит $R(\tau) - z(\tau)$, [$R(\tau)$ — годовой выпуск продукции в стоимостном выражении; $z(\tau)$ — затраты на производство этой продукции]; если же оборудование заменяется на новое, то прибыль составит $R(0) - z(0) - p$. Оптимальной для периода T будет такая политика, которая обеспечит наибольшую прибыль в этом периоде, иначе говоря, при условии, что $R(0) - z(0) - p > R(\tau) - z(\tau)$ оборудование целесообразно заменить, а в случае $R(0) - z(0) - p \le R(\tau) - z(\tau)$ его выгодно сохранить. Таким образом, получаем:

$$F_1(\tau) = \max \begin{cases} R(\tau) - z(\tau) - \text{сохранение;} \\ R(0) - z(0) - p - \text{замена.} \end{cases}$$

Для k=2 рассматривается прибыль двух последних лет (T – 1) и Т. Поскольку для всевозможных состояний уже найдено оптимальное действие, обеспечивающее максимум прибыли $F_1(\tau+1)$, для варианта сохранения оборудования расчетная формула прибыли за два последних года примет вид $R(\tau) - z(\tau) + F_1(\tau+1)$, для варианта замены — $R(0) - z(0) - p + F_1(\tau+1)$. Условно-оптимальной в последние два года будет политика, обеспечивающая максимум прибыли:

$$F_2(\tau) = \max \begin{cases} R(\tau) - z(\tau) + F_1(\tau+1) - \text{сохранение;} \\ R(0) - z(0) - p + F_1(1) - \text{замена.} \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для k=2, k = 3 и т.д. Общее функциональное уравнение для вычисления условно-оптимальной прибыли можно записать в следующем виде:

$$F_k(\tau) = \max \begin{cases} R(\tau) - z(\tau) + F_{k-1}(\tau+1) - \text{сохранение;} \\ R(0) - z(0) - p + F_{k-1}(1) - \text{замена.} \end{cases}$$

Для последнего шага $k=T$ имеем максимальную прибыль:

$$F_T(\tau) = R(0) - z(0) + F_{T-1}(1) \text{ — сохранение.}$$

Затем обратным действием, просматривая шкалу времени от первого года до последнего года T, находим оптимальные стратегии замены или сохранения оборудования. Решим задачу численно. При k=1 выражение условно-оптимальной прибыли принимает вид:

$$\text{для } \tau = 1 \;\; F_1(1) = \max \begin{pmatrix} 30-12 \\ 30-11-14 \end{pmatrix} = 18 \text{ (сохранение);}$$

$$\text{для } \tau = 2 \;\; F_1(2) = \max \begin{pmatrix} 24-12 \\ 30-11-14 \end{pmatrix} = 12 \text{ (сохранение);}$$

$$\text{для } \tau = 3 \;\; F_1(3) = \max \begin{pmatrix} 21-13 \\ 30-11-14 \end{pmatrix} = 8 \text{ (сохранение);}$$

$$\text{для } \tau = 4 \;\; F_1(4) = \max \begin{pmatrix} 19-13 \\ 30-11-14 \end{pmatrix} = 6 \text{ (сохранение).}$$

Репозиторий КарГУ

Результаты расчетов удобно записать в таблице 2.

Таблица 2

Решение задачи о замене горно-шахтного оборудования методом динамического программирования

Стоимостные показатели эксплуатации оборудования	Время τ, в течение которого используется оборудование, лет					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $k(\tau)$ Ежегодные затраты $z(\tau)$	30 11	30 12	24 12	21 13	19 13	16 13
Шаг k=1: условно-оптимальная прибыль сохранение (да, нет) замена (да, нет)		18 Да Нет	12 Да Нет	8 Да Нет	6 Да Нет	
Шаг k=2: условно-оптимальная прибыль сохранение (да, нет) замена (да, нет)		23 Нет Да	23 Нет Да	23 Нет Да		
Шаг k=3: условно-оптимальная прибыль сохранение (да, нет) замена (да, нет)		41 Да Нет	35 Да Нет			
Шаг k=4: условно-оптимальная прибыль сохранение (да, нет) замена (да, нет)		53 Да Нет				
Шаг k=5: условно-оптимальная прибыль сохранение (да, нет)	72 Да					

Все возможные варианты работы с горно-шахтным оборудованием различных возрастов просмотрены, следовательно, можно перейти к шагу $k = 2$:

$$\text{для } \tau = 1 \ F_2(1) = \max\begin{pmatrix} 30-12+12 \\ 30-11-14+18 \end{pmatrix} = 23 \text{ (замена);}$$

$$\text{для } \tau = 2 \ F_2(2) = \max\begin{pmatrix} 24-12+8 \\ 30-11-14+18 \end{pmatrix} = 23 \text{ (замена);}$$

$$\text{для } \tau = 3 \ F_2(3) = \max\begin{pmatrix} 21-13+6 \\ 30-11-14+18 \end{pmatrix} = 23 \text{ (замена).}$$

Затем следует рассчитать варианты при k=3:

$$\text{для } \tau = 1 \ F_3(1) = \max\begin{pmatrix} 30-12+23 \\ 30-11-14+23 \end{pmatrix} = 41 \text{ (сохранение);}$$

$$\text{для } \tau = 2 \ F_3(2) = \max\begin{pmatrix} 24-12+23 \\ 30-11-14+23 \end{pmatrix} = 35 \text{ (сохранение).}$$

При k=4 необходимо рассчитать единственное $\tau = 1$:

$$F_4(1) = \begin{pmatrix} 30-12+35 \\ 30-11-14+41 \end{pmatrix} = 53 \text{ (сохранение).}$$

В первом году пятилетки (2010 г.) стратегия определена однозначно — сохранение оборудования, но для расчета наивысшей прибыли от принятия оптимальных стратегий замены и сохранения

Репозиторий КарГУ

оборудования на всем пятилетнем интервале времени (2010–2014 гг.) следует провести необходимый расчет:

$$F_5(0) = 30 - 11 + 53 = 72.$$

Таким образом, найдена максимальная прибыль за 2010–2014 гг. в свете реализации ГП ФИИР, равная 72 млн. тенге.

Проследим теперь по данным таблицы 2 оптимальные стратегии замены и сохранения горного оборудования.

В первый год пятилетия (2010 г.), т.е. на шаге 4, возраст горно-шахтного оборудования равен одному году. Замены не происходит. Получаем прибыль в размере 19 млн. тенге (30–11). Во второй год пятилетки (2011 г.) возраст эксплуатируемого оборудования равен $\tau = 2$, оборудование также сохраняется. Таким образом, получаем прибыль в размере 18 млн. тенге. На следующем шаге возраст оборудования равен $\tau = 3$ года; из таблицы 2 видно, что оптимальная стратегия — замена оборудования, следовательно, прибыль в этот год составляет — 2 млн. тенге (24–12–14), т.е. шахте нужно брать кредит для реконструкции участка в начале четвертого года или использовать часть прибыли прошлых периодов. В следующем периоде прибыль составит 19 млн. тенге (30–11). И на начало пятого года (2014 г.) пятилетки (шаг 5) замены оборудования не происходит. Прибыль в этом году составит 18 млн. тенге (30–12). Суммарная прибыль на шахте за 2010–2014 гг. составит 72 млн. тенге (19+18–2+19+18).

Заключение

Необходимо отметить, что область приложения методов динамического программирования к решению ряда важных для практики задач далеко не исчерпывается приведенными нами примерами. В частности, следует указать, что эти методы находят себе применение при решении одной из важнейших экономических задач, связанной с анализом межотраслевого баланса, когда взаимные потоки продукции между отраслями меняются во времени и, следовательно, имеют динамический характер.

Не мешает, пожалуй, сделать еще одно замечание. Все приведенные выше задачи обладают одной общей особенностью. В каждой из них исходное состояние системы (исходное значение параметров) и n-шаговый процесс решения задачи однозначно определяют ее конечный результат. Так, например, распределение капиталовложений между тремя шахтами АО «АрселорМиттал Темиртау» приводит в конце определенного периода к вполне конкретному однозначному приросту прибыли (объема добычи угля).

Процессы распределения, в которых конечное состояние системы полностью определяется исходным заданием параметров, называют детерминированными.

Между тем большинство практических задач носит в себе элемент случайности в том смысле, что конечное решение не может быть однозначно определено. Осуществление капиталовложений в какое-нибудь предприятие еще не гарантирует с достоверностью получение в течение данного периода соответствующей прибыли или прироста продукции. Весь процесс производства представляет собой сложный комплекс множества взаимосвязанных факторов, и изменение одного или нескольких из них может повлиять на достижение поставленной цели. В связи с этим для большинства задач логична следующая постановка вопроса: при заданном исходном состоянии системы (заданных начальных значениях параметров) ее конечное состояние следует ожидать с такой-то вероятностью. Иначе говоря, это означает, что при заданных капиталовложениях в результате n-шагового процесса прирост продукции (прибыли) следует ожидать с такой-то вероятностью.

Процессы, в которых в результате решения задачи получается не вполне определенное значение интересующей нас величины, а некоторое распределение ее, называются стохастическими. Тот факт, что оптимизируемая величина является случайной (может принять различные численные значения), не вносит существенных трудностей в процесс решения задач. Всегда можно ставить вопрос об оптимуме ее среднего значения.

Метод функциональных уравнений приложим и к решению такого рода задач.

References

1 *Smiths U.N., Kuzubov V.I., Voloshchenko A.B.* Mathematical programming: Tutorial. — M.: Higher school, 1976. — P. 352.

2 *Monahov A.V.* Mathematical methods of the analysis of economy. — SPb.: Peter, 2002. — P. 176.

Репозиторий КарГУ

3 *Kremer N.S., Putko A.B. et al.* Research of operations in economy: Tutorial. — M.: Banks and stock exchanges, UNITI, 1997. — P. 407.

4 *Fedoseyev V.V., Garmash A.N. et al.* Economic-mathematical methods and applied models: Tutorial. — M.: UNITI, 1999. — P. 391.

5 *Hedli J.* Nonlinear and dynamic programming / Trans. from English. — M.: World, 1967. — P. 507.

6 *Dridzh N.A., Bajmuhametov S.K. et al.* Karaganda coal field: Reference book. — M.: Bowels, 1990. — P. 148–150.

7 *Gluhov V.V.* Management: the Textbook. — SPb.: The special literature, 2000. — P. 10, 11.

Р.С.Каренов

Көп қадамды экономикалық есептерді зерттеу және оларды шешу тәсілдерін жасау динамикалық бағдарламалау аясы ретінде

Динамикалық бағдарламалау әр алуан экстремалды есептерді шешудің сандық тәсілдерін талдаумен және жасаумен айналысатын қолданбалы математиканың жаңа тарауы екендігі көрсетілген. Экономикалық үдерістерді жеке қадамдарға бөліп көрсету күрделі есептерді едәуір оңайлатуға мүмкіндік беретіндігі дәлелденген. Динамикалық бағдарламалау есептері Ричард Беллманның оңтайлылық принципін дәл бейнелейтін функционалды теңдеулерді қолдануға болатындығы көрсетілген. Кен өнеркәсібінде ресурстарды оңтайлы бөлу есептерін шешу үшін динамикалық бағдарламалауды қолдану мүмкіндігі ашылған. Динамикалық бағдарламалау тәсілдерімен көмір өндіру кәсіпорындары арасында күрделі қаржыны оңтайлы бөлу есебін шешу алгоритмі ұсынылған. Динамикалық бағдарламалау аппаратын қолданып, көмір шахталары учаскелерінде кен жабдықтарын алмастырудың оңтайлы саясат мәселесінің шешімі қарастырылған.

R.S.Karenov

Studying of multistage economic problems and working out of methods of their decision as a subject of dynamic programming

It is shown that dynamic programming is new section of the applied mathematics, engaged in the analysis and working out of numerical methods of the decision of various extreme problems. It is proved that step-by-step representation of economic process allows to simplify the decision of challenges essentially. It is noticed that problems of dynamic programming suppose use of the functional equations which are exact record of a principle of an optimality of Richard Bellman. Possibilities of application of dynamic programming for the decision of problems on optimum distribution of resources in mining industry is revealed. The algorithm of the decision of a problem of optimum distribution of capital investments between the coal-mining enterprises a method of dynamic programming is offered. The solution of a problem of an optimum policy of replacement of the mountain equipment on a site of a colliery with application of the device of dynamic programming is considered.

Репозиторий КарГУ