НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ГЕЛЬДЕРУ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА.

Туленбаев Канат Сауранбаевич[1], **Жадыранова Асем Амирбековна**[2]

[1,2]Алматинский Технологический Университет, Алматы, Казахстан
[1]E-mail: tkanats@mail.ru
[2]E-mail: asem.zhadyranova@mail.ru.

Рассматривается краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений недивергентного вида второго порядка с граничным условием, задаваемым общим оператором первого порядка. Устанавливается априорная оценка нормы Гельдера для первой производной решения при минимальных требованиях на гладкость данных. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x) = 0, x \in \Omega, \tag{1}$$

$$b(x,u,u_x) = \phi(x), x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где Ω – область в R_n, $\partial\Omega$ - ее граница. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. В отличие от результатов [1] вводится в рассмотрение краевое условие (2), а также значительно снижается требования на гладкость данных. Следующее утверждение опирается на результаты [2], [3] и [4], [5].

Теорема. Пусть$u \in W_q^2(\Omega), q > n, u(x)$ – решение задачи (1), (2), $max|u| \le M, max|u_x| \le M_1, \partial\Omega \in C^2$.

Предположим, что на этом решении выполнено условие эллиптичности

$$\nu\xi^2 \le a_{ij}(x,u(x),u_x(x))\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}\xi^2, \forall\xi \in R^n$$

ν - положительная постоянная, при $x \in \overline{\Omega}, |u| \le M, |p| \le M_1, p \in R^n$. Функции $a_{ij}(x,u,p)$ дифференцируемы по своим аргументам и выполнены следующие неравенства:

$$\left[\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \mu_1,$$

$$\left[\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + |a(x,u,p)| \le \Phi(x),$$

μ_1- положительная постоянная, $\Phi \in L_q(\Omega), q > n$. Предположим, что $\phi \in W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$.

Пусть далее, при $x \in \partial\Omega, |u| \le M, |p| \le M_1$ функции $b(x,u,p), b_{p_i}(x,u,p)$ дифференцируемы по своим аргументам,

$$(b_p, n) > 0$$

и, кроме того,

$$|b| + |b_x| + |b_u| + |b_p| + |b_{px}| + |b_{pu}| + |b_{pp}| \le \mu_2$$

Тогда норма в $C^{1+\alpha}(\Omega)$

$$uC,$$

где $\alpha \in (0,1),\ > 0$, определяются постоянными $M, M_1, \mu_1, \mu_2, \nu, \gamma, \delta$, нормой функции $\phi W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$, нормой $(x)L_q(\Omega)$ и границей области Ω. Доказательство. В силу результатов [1] достаточно получить требуемую оценку вблизи границы области Ω. Так же в силу условий гладкости данных без ограничения общности можно считать, что уравнение (1) задано в

$$B_1^+ = \{x \in R^n : |x| < 1, x_n > 0\}$$

условие (2) на

$$_1 = xRn : |x| < 1, xn = 0.$$

Рассмотрим тождество:

$$0 = \int_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{n=1} \left(a_{ij}u_{x_ix_j} + a\right)\eta_s^{(\tau)} = \int_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{n=1} \left(a_{ij}u_{x_jx_i}\eta_s^{(\tau)} + \left[\frac{da_{ij}}{dx_i}u_{x_jx_i} - \frac{da_{ij}}{dx_i}u_{x_ix_j}\right]\eta^{(\tau)}\right)dx$$
$$- \int_{\Gamma_e} \sum_{n=1}^{n=1} a_{nj}u_{x_jx_i}\eta^{(\tau)}dx \tag{3}$$

справедливое для любых $\eta^{(\tau)} \in W_2^1(B_1^+)$ таких, что $\eta^{(\tau)} = 0$ при $x \in \partial B_{11}$. Не умаляя общности, считаем, что

$$0 \le u_{x_i} \le 1, i = 1, ..., n$$

и обозначим

$$z = 10nu_{xm} + w,$$

где m-фиксированное целое, $1 \le m \le n - 1$.

Подставляя в (3)

$$\eta^{(\tau)} = u_{x_\tau}F + 5n\delta_\tau^m F,$$

где $F \in W_2^1(B_1^+), F = 0$ на $\partial B_1^+{}_1$, m-символ Кронекера, получим:

$$\int_{B_1^+} a_{ij}u_{x_ix_\tau}u_{x_jx_\tau}F + \frac{1}{2}a_{ij}z_{x_j}F_{x_i} + \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial p_j}\right]u_{x_ix_l}z_{x_j}F +$$

$$+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_i}z_{x_j}F - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_ix_j}WF + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}z_{x_j}F -$$

$$-\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\tau}u_{x_ix_j}u_{x_\tau}F - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_ix_j}u_{x_m}5nF - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_m}u_{x_ix_j}5nF +$$

$$+au_{x_\tau x_\tau} + au_{x_\tau}F_{x_\tau} + 5naF_{x_m}dx - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} a_{nj}z_{x_j}Fdx' = 0$$

Обозначим $x' = (x_1, ..., n-1)$. Обратимся к граничному интегралу в (4)

$$I_{ij} = \frac{1}{2}\int a_{nj}z_{x_i}Fdx$$

и преобразуем его к более удобному виду. Применим оператор

$$2x_\tau \frac{d}{dx_\tau} + 10n\frac{d}{dx_m}$$

к равенству

$$b(x,u,u_x) = \phi(x).$$

Тогда получим соотношение

$$b_{p_i} z_{x_i} + 2b_u w + 10nb_u u_{x_m} + 2u_{x_\tau} b_{x_\tau} + 10nb_{x_m} = 2u_{x_\tau}\phi_{x_\tau} + 10n\phi_{x_m},$$

выражая из которого z_{x_n} получим

$$a_{n_j} z_{x_j} = \beta^\tau z_{x_\tau} + h + \frac{a_{nn}}{b_{p_n}}(zu_{x_\tau}\phi_{x_\tau} + 10n\phi_{x_m}),$$

$$\beta^\tau = -\frac{b_{p_\tau}}{b_{p_n}} a_{nn} + a_{n\tau},$$

$$h = -\frac{a_{nn}}{b_{p_n}}(2b_u w + 10nb_n u_{x_m} + 2b_{x_\tau} u_{x_\tau} + 10nb_{x_m}).$$

В результате имеем

$$I_{ij} = \frac{1}{2}\int u_i F_i dx + \frac{1}{2}\int \frac{\partial F}{\partial z_{x_i}} F dx + \int \frac{a_m}{a_{x_i} + \xi\eta a_{x_i}} F dx.$$

Обозначим

$$A_{\kappa,\rho} = \left\{ x \in B_\rho^+ : z(x) > k \right\}$$

Тогда при $x \in A_{k,\rho}$

$$\beta^\tau z_{x_n} F_{x_\tau} - \beta^\tau z_{x_\tau} F_{x_n} = \beta^\tau z_{x_n} z_{x_\tau}\xi^2 + \beta^\tau z_{x_n}(z-k)_+ 2\xi\xi_{x_\tau} - \beta^\tau z_{x_\tau} z_{x_n}\xi^2 -$$

$$-\beta^\tau z_{x_\tau}(z-k)_+ 2\xi\xi_{x_n} = \beta^\tau z_{x_n}(z-k)_+ 2\xi\xi_{x_\tau} - \beta^\tau z_{x_\tau}(z-k)_+ 2\xi\xi_{x_n}$$

В результате получим

$$\int_{A_{\kappa,\rho}} z_x^2 \xi^2 dx \le C_1 \left\{ \int_{A_{\kappa,\rho}} \left[(z-k)^2 \xi_x^2 + z_x^2 (z-k)\, \xi^2 \right] dx + mes^{1-2/q} A_{\kappa,\rho} \right\}$$

Из этих неравенств и получим оценку постоянной Гельдера.

Список литературы

[1] Ладыженская О.А., Уральцева Н. Н. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности. - Успехи математических наук, 1986, т.41, вып.5, с.59-83.

[2] Туленбаев К.С., Уральцева Н. Н. Нелинейная краевая задача для эллиптических уравнений общего вида. – В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными, СО АН СССР, Институт математики, 1987, №2, с. 95–112.

[3] Туленбаев К.С. Непрерывность по Гельдеру решений нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений недивергентного вида. – Вестник КазГУ, сер. Математика, механика, №5(19), 1999г., с. 116–120.

[4] Lieberman G.M. The nonlinear oblique derivative problem for quasilinear elliptic equations. – Nonlinear Analysis, 1984, v.8, №1, p. 49-66.

[5] Tulenbayev K.S. Estimates of Holder constants for solutions elliptic equations of nondivergent form. Nonlinear Analysts, 2016, v.32, №1, p. 94-99.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

Шерматова Хелола[1], **Орымбетов Самгат Аманкулович**[2]

[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
[1]E-mail: hilola-1978@mail.ru
[2]КарУ, Караганда, Казахстан

В этом сообщении ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yyy}, & (x,y)\in G_i\,(i=2,3,4),\end{cases}$

$a,b,c\in R$, $\gamma=b/a$, $1<\gamma<+\infty$, а $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, здесь G_1 — прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2, G_3 и G_4 — треугольники с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; A, $D(-1,1)$, A_0 и B, $E(2,1)$, B_0 соответственно; J_1, J_2 и J_3 — открытые отрезки с вершинами в точках A, B; A, A_0 и B, B_0 соответственно.

Эта работа является продолжением работы [1]. В этой работе поставлен один класс краевых задач для уравнения (1) при произвольных постоянных коэффициентов $a,b,c\in R$ и исследован случай 1 $(a\neq 0, b=0)$. В работах [2,3] исследован случай 2 $(a=0, b\neq 0)$, а в этой работе исследуется случай 7 при $1<\gamma<+\infty$.

Так как $\gamma=b/a$, $1<\gamma<+\infty$, то без ограничения общности можно полагать $a>0$, $b>0$. Тогда для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\tilde{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в