3. Then problem (1)–(4) has a unique solution $u(x,t)$ in the class of continuous functions satisfying the initial and boundary conditions, with the solution having different forms for $t > \frac{x}{a}$ and $t < \frac{x}{a}$

Remark. Instead of x_0, one can consider a continuous bounded function.

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488729, 2024–2026.)

References

[1] Nakhushev A.M., Structural and qualitative properties of the inverse of the fractional integro-differentiation operator with fixed endpoints, Differ. Equ., 36:8 (2000), 1211–1219. https://doi.org/10.1007/BF02754189.

[2] Khubiev K.U., Boundary value problem with shift for loaded hyperbolic-parabolic type equation involving fractional diffusion operator, Vestnik Udmurtskogo Universiteta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki, 28:1 (2018), 82–90. https://doi.org/10.20537/vm180108

[3] Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S., Omarov M.T., Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45:11 (2024), 5898–5906. https://doi.org/1134/S1995080224606830

[4] Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S., Solution of a two-dimensional parabolic model problem in a degenerate angular domain, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 111:3 (2023), 91–108. https://doi.org/10.31489/2023M3/91-108

АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Айсагалиев С.А.[1], **Асан Н.А.**[2]

[1,2]КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[1]E-mail: nurkasym.asan.02@mail.ru

[2]E-mail: aisagaliev@kaznu.kz

Необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода и построение его решения является одной из актуальных нерешенных проблем математики (1; 2). Данная работа продолжение научных исследований из (3; 4). Предлагается решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$Ku = \int_a^b K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t \in I_1 = [t_0, t_1], \quad \tau \in I_2 = [a,b] \tag{1}$$

где $K(t,\tau) = \|K_{ij}(t,\tau)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известная матрица порядка $n \times m$, элементы матрицы $K(t,\tau)$ функции $K_{ij}(t,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на множестве $S = \{(t,\tau) \in R^2 \mid t \in I_1, \tau \in I_2\}$, функция $f(t) \in L_2(I_1, R^n)$ – заданная функция, $u(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ – искомая функция.

Наряду интегрального уравнения (1), рассмотрим счетное число интегральных уравнений Фредгольма первого рода с фиксированным параметром:

$$\int_a^b L^{(k)}(\tau)u(\tau)\,d\tau = a^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $L^{(k)}(\tau) = \|L_{ij}^{(k)}(\tau)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in R^n$ – заданные матрицы порядков $n \times m$, вектор $n \times 1$ для каждого значения k, $L_{ij}^{(k)}(\tau) \in L_2(I_2, R^1)$, $\quad u(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ – искомая функция.

Рассмотрим конечное число интегральных уравнений Фредгольма первого рода с фиксированным параметром:

$$\int_a^b L^{(k)}(\tau)u(\tau)\,d\tau = a^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \tag{3}$$

где N – любое конечное число, $u(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$.

Решены следующие задачи:

Задача 1. Найти равносильную (эквивалентную) систему счетного числа интегральных уравнений Фредгольма первого рода с фиксированным параметром 2 для интегрального уравнения (1).

Задача 2. Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (3) при любого конечного N.

Задача 3. Найти общее решение интегрального уравнения (3) для любого конечного числа N и определить разность между $u_N^*(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ и решением интегрального уравнения (1).

Решения задач 1–3 имеет несколько этапов. На первом этапе определяется полная ортонормированная система $\{\varphi_k(t)\}$, $t \in I_1 = [t_0, t_1]$, путем ортогонализаций по методу Шмидта системы $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$. Далее, находим счетную систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_a^b K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau \right) \varphi_k(t)\,dt = \int_a^b \left(\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\varphi_k(t)\,dt \right) u(\tau)\,d\tau \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

в силу теоремы Фубини о перемене переменных интегрирования, в результате получим:

$$\int_a^b \left(\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\varphi_k(t)\,dt \right) u(\tau)\,d\tau = \int_a^b L^{(k)}(\tau)u(\tau)\,d\tau = a^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a^{(k)} = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\varphi_k(t)\,dt$.

На втором этапе исследования находим общее решение конечной системы интегральных уравнений с фиксированным параметром (3) при любом N. Доказано, что интегральное уравнение (3) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица

$$C_N(a,b) = \int_a^b L_N(\tau)L_N^{(*)}(\tau)\,d\tau$$

порядка $Nn \times Nn$ является положительно определенной, где

$$L_N(\tau) = \begin{pmatrix} L^{(1)}(\tau) \\ \vdots \\ L^{(N)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad a_N = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Общее решение интегрального уравнение (3) имеет вид:

$$u_n(\tau) = L_N^*(\tau)C_N^{-1}(a,b)a_N + v_N(\tau) - L_N^*(\tau)C_N^{-1}(a,b)\int_a^b L_N(\eta)v_N(\eta)\,d\eta, \tau \in I_2 \tag{4}$$

где $v_N(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ – произвольная функция.

На третьем этапе исследования определится функция $v_N^*(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ из решения оптимизационной задачи:

$$J(v_N) = \int_{t_0}^{t_1} \left| f(t) - \int_a^b K(t,\tau)u_N(\tau)\,d\tau \right|^2 dt \to \inf$$

$$v_N(t) \in L_2(I_2, R^m),$$

где $f(t) \in L_2(I_1, R^n)$ – известная функция, $u_N(\tau) \in L_2(I_2, R^m)$ определяется по формуле (4). Величина $J_N(v_N^*)$ является оценкой погрешности решения приближения $u_N^*(\tau)$ из (4) при $v_N(\tau) = v_N^*(\tau)$ и решением интегрального уравнения (1).

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 543 с..

[2] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.

[3] Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh. Constructive methods for solvability of Fredholm equation of the first kind // Electronic Journal of Qualitative theory of differential equations, 2017. I. 45. P. 1–11.

[4] Aisagaliev S.A. Nurmagambetov D. Solvability and Construction of a solution to the Fredholm integral equation of the first kind // Journal of Applied Mathematics and Physics, 2024. Vol. 12. I. 02. P. 720–735.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Айсагалиев С.А.[1], Сегизбай А.М.[2]

[1,2]КазНУ им. Аль-Фараби ,Алматы , Казахстан
[1]E-mail: aisagaliev@kaznu.kz
[2]E-mail: akbota.segizbay@mail.ru