Список литературы

[1] Стоун М. Х., Сравнение рядов Фурье и Биркгофа // Труды Американского математического общества, 1926. 28(4)., с. 695-761.

[2] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы // штат Нью-Йорк, США. 1968.

АБЕЛЬ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІМЕН БЕРІЛГЕН ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕР

Бестай А.Е.[1], Алдибекова М.С.[2]

[1,2]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан
[1]E-mail: abpe.bestay@mail.ru
[2]E-mail: aldibekova.m@mail.ru

Абель интегралдық теңдеуі – сингулярлық ядролы интегралдық теңдеудің бір түрі болып табылады. Бұл теңдеу көбінесе кері есептерде, соның ішінде томография, жылуөткізгіштік, астрофизика, механика және тағы басқа да қолданбалы салаларда кездеседі.

Абель интегралдық теңдеуі норвег математигі Нильс Хенрик Абельдің есімімен байланысты. Ол XVIII-XIX ғасырлар тоғысындағы интегралдық теңдеулер теориясының дамуына үлкен үлес қосты [1]. Абель мұндай типтегі теңдеулерді эллиптикалық интегралдарды зерттеу кезінде қолданған. Бірінші текті Абель интегралдық теңдеуі - ерекше нүктелері бар есептерде, мәселен классикалық механика мен физика есептерінде пайда болатын сингулярлы интегралдық теңдеулердің ерекше жағдайы болап табылады. Бұл мақалада Абель теңдеуінің аналитикалық шешу әдістері қарастырылып, шешу мысалдары мен қолданбалы есептердегі қолданыстары келтірілген.

Абельдің бірінші текті теңдеуінің классикалық түрі

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, x \in (0,\ \alpha) \tag{1}$$

ерекшелілігі - $(x-t)^{-\alpha}$ ядросының меншіксіз (сингулярлы) сипатында. Мұндай теңдеулер интеграл таңбасының астында қарапайым мағынада интегралдауға келмейді, ол үшін арнайы әдістер қолданылады[2].

- Бірінші реттік теңдеуде белгісіз функцияφ интеграл таңбасының астында тұрады, оған интегралдан тыс қосымша сызықты мүшелер қосылмайды.
- αß1болғанда сингулярлық күшейеді және теңдеуді шешу қиындай түседі.
- $\alpha = \frac{1}{2}$, жағдайында теңдеу классикалық физикалық мағынаға (мысалы, жылудың таралуы жөніндегі есептерді шешу кезінде) ие болады.

Кері теорема (Абель операторы).

Егер оң жақ бөлік $f(x)$ жеткілікті түрде тегіс (мысалы, үзіліссіз дифференциалданатын) болса, онда Абель теңдеуінің шешімі бар және жалғыз болады, әрі былай өрнектеледі:

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right)$$

Бұл — берілген $f(x)$ функциясы бойынша φ функциясын қалпына келтіретін Абельдің кері операторы.

(1)түрдегі Абель теңдеуінің ең жиі кездесетін жағдайы $\alpha = \frac{1}{2}$ болғанда

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = f(x).$$

Бұл теңдеуді - түбірлік ядросы бар Абельдің бірінші текті теңдеуі деп атайды.

Шешу әдісі: Теңдеу Абель интегралын қолданып, орамды кері айналдыру әдісімен шешіледі:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \qquad (2)$$

бұл, «егер теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясы берілген жағдайда шешім — осы функция бойынша алынған арнайы интегралды дифференциалдау арқылы жүзеге асады» дегенді білдіреді.

1 - есеп. Келесі Абель теңдеуін қарастырайық:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = x, \quad x \in [0,1]$$

Шешу жолы:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}}dt$$

Формулаға сәйкес , $u = x - t,\ dt = -du$ ауыстыруын енгізсек, онда

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}}dt = \int_0^x \frac{x-u}{\sqrt{u}}du = x\int_0^x \frac{1}{\sqrt{u}}du - \int_0^x \frac{u}{\sqrt{u}}du = x2\sqrt{x} - \int_0^x \sqrt{u}du = \frac{4}{3}x^{3/2}$$

Ендігі кезекте (2) шешімді пайдаланамыз. Сонда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{3/2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2}\right) = \frac{2}{\pi}x^{1/2}$$

Жауабы: $\frac{2\sqrt{x}}{\pi}$.

2 - есеп. Оң жағы параметрмен берілген төмендегі Абель теңдеуін қарастырайық

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\alpha t^2}{\sqrt{x-t}}dt$$

Шешу жолы 1 – есепке ұқсас

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}ddx0xat2x - tdt.$$

Қайтадан, $u = x - t \ \Rightarrow \ t = x - u, \ \ dt = -du$ ауыстыруын енгізсек, онда

$$a\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{x-t}}dt = a\int_0^x \frac{(x-u)^2}{\sqrt{u}}du = a\int_0^x \frac{x^2 - 2xu + u^2}{\sqrt{u}}du =$$

$$= \alpha x^2 \int_0^x u^{-1/2} du - 2\alpha x \int_0^x u^{1/2} du + \alpha \int_0^x u^{3/2} du = \alpha x^2 \cdot 2\sqrt{x} - 2\alpha x \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} \alpha x^{5/2} =$$

$$= a\left(2x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\, x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}}\right) = ax^{\frac{5}{2}}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{16a}{15} x^{\frac{5}{2}}.$$

Сонда:

$$\alpha \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{16\alpha}{15} x^{5/2} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{16\alpha}{15} x^{5/2}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{16\alpha}{15} \cdot \frac{5}{2} x^{3/2} = \frac{8\alpha}{3\pi} x^{3/2}$$

Жауабы: $\varphi\left(x\right) = \frac{8a}{3\pi} x^{\frac{3}{2}}$. Енді Абель интегралдық теңдеуінің физикадағы қолдануына нақты есеп қарастырайық. Бұл теңдеу көбінесе сферикалық симметриялы жүйелерде кездеседі, мысалы, астрофизикада, оптикада, гравиметрияда немесе плазма диагностикасында[3].

Бізде сфералық симметриялы объект бар деп елестетіп көрейік және бақылау сызығы бойымен сәулелену тығыздығын (немесе басқа шаманы) өлшей аламыз. Сфера ішіндегі шығу көзінің таралуын анықтау керек - мысалы, тығыздықтың, температураның немесе жарықтылықтың таралуы.

Есеп келесі түрде қойылсын: 3 - есеп. Айталық, $f(r)$ функциясы – сфера ортасынан r қашықтықта (сәуле жақындық - радиусы) өтетін сәуле бойындағы тығыздықтың өлшенетін проекциясы (мәселен, жарық қарқындылығы) болсын, онда сфера ішіндегі x радиусы бойынша таратылған (x) - көлемдік тығыздықты табу қажет.

$$f\left(r\right) = 2\int_r^R \frac{\rho(x) x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx, \tag{3}$$

мұндағы $f\left(r\right)$ – бақыланатын функция (экрандағы қарқындылық), $\rho(x)$ – нүктедегі белгісіз тығыздық, R -сфераның радиусы.

Бұл Абельдің екінші текті теңдеуі. Бұл үш өлшемді үлестірімнің жазықтыққа проекциясы функцияның өзімен қалай байланысты екенін сипаттайды.

Есепті шешуде

$$\rho\left(x\right) = -\frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{df(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \tag{4}$$

Абельдің кері түрлендіруі қолданылады. Осылайша $f(r)$ – ді біле отырып, $\rho\left(x\right)$ - бастапқы үлестіруді табуға болады. Айталық бақылу қарқындылығы $f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ болсын,онда $\frac{df(r)}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$

Алынған мәнді (4) теңдеуге қойып, алатынымыз:

$$\rho\left(x\right) = -\frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\rho\left(x\right) = \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Соңғы интегралды санасақ:

$$\rho\left(x\right) = const,$$

яғни, мәні тұрақты шамаға тең болады. Бұл, шардың ішінде тығыздық – біртекті екенін білдіреді.

Нақтылық үшін алынған нәтижені тексеріп көрейік: ол үшін (3) теңдеуін ескере кетейік, және де $\rho(x) = \rho_0 - const$ тұрақты деп тұжырымдайық. Осы мәнді (3) теңдеуге қоямыз:

$$f(r) = 2\rho_0 \int_r^R \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx, \tag{5}$$

Келесі ауыстыруды қолданамыз:

$$x = rsec\theta \Longrightarrow dx = \frac{rsin\theta d\theta}{cos^2\theta} \Longrightarrow \sqrt{x^2 - r^2} = rtg\theta,$$

$$x = r \Longrightarrow \theta = 0; \;\; x = R \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{r}{R}\right).$$

Алынған ауыстыруларды (5) теңдеуге қоямыз. Сонда

$$f(r) = 2\rho_0 \int_r^R \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = 2\rho_0 \int_0^{arccos\left(\frac{r}{R}\right)} \frac{rsec\theta}{rtg\theta} \bullet \frac{rsin\theta d\theta}{cos^2\theta} = 2\rho_0 \int_0^{arccos\left(\frac{r}{R}\right)} rsec^2\theta d\theta =$$

$$= 2\rho\sigma r \int_0^{\arccos\left(\frac{r}{R}\right)} \sec^2\theta \, d\theta = 2\rho\sigma r \operatorname{tg}\theta \Big|_0^{\arccos\left(\frac{r}{R}\right)} = \operatorname{tg} \arccos\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} =$$

$$= 2\rho_0 r \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} = 2\rho_0 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Егер $f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ болса, онда $2\rho_0\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - r^2} \Longrightarrow \rho_0 = \frac{1}{2}$.

Тексеру керегі де осы болатын: $f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ болғанда $\rho_0 = \frac{1}{2} = const$ аламыз.

Демек, бұл функциямен берілген Абель интегралдық теңдеуі шешімі бойынша тығыздықтың біртекті үлестіруіне ие болады.

Ескерту. Осылайша, кері жағдайды да қарастыруға болады, яғни көлемдік тығыздықты $\rho(x)$ $(\rho(x) = const)$ берілген деп есептеп, сәйкес, бақылауға қажетті $f(r)$ функциясын табуға болады.

Абель интегралдық теңдеуінің физикада, әсіресе симметриялы есептерде және сыртқы өлшемдер бойынша объектінің ішкі құрылымын қалпына келтіру қажет болатын кері есептерде маңызды қосымшалары бар. Абельдің интегралдық теңдеуі жай ғана математикалық формула емес, физиканың көптеген іргелі есептерін шешудің негізінде жатқан қуатты құрал. Оның бірегейлігі өлшенген проекцияларды (мысалы, көру сызығы бойындағы жарық қарқындылығы) симметриялы жүйелердегі физикалық шамалардың ішкі үлестірімдерімен байланыстыру қабілетінде жатыр.

Сондықтан, Абель теңдеуімен жұмыс істеудің физикалық мәні мен техникасын түсіну- теориялық білімді тереңдетіп қана қоймай, күрделі табиғи және техникалық жүйелерді зерттеуде практикалық құрал қызметін атқарады.

Әдебиеттер тізімі

[1] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003,608 с.

[2] Краснов М.И., Киселев А.И., Макаренко Г.И. «Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями» Изд. 3-е, испр. - М.: Едиториал. УРСС, 2003. - 192 с.

[3] Огородников И. Н. Введение в обратные задачи физической диагностики: специальные главы высшей математики для технологов: учебное пособие— Екатеринбург. Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 199 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Дана Бибулова[1], Бурхан Калимбетов[2], Касымхан Туреханов[3]

[1,3]Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
[1]E-mail:danass86@mail.ru
[3]E-mail:kasm-khan@mail.ru
[2]Университет Дружбы Народов имени А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан
[2]E-mail:bkalimbetov@mail.ru

Для исследования дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами применяются асимптотические методы, наиболее известными из которых являются метод расщепления Фещенко-Шкиля-Николенко (1; 2) и метод регуляризации Ломова (3; 4). Метод расщепления в основном применялся для рассмотрения дифференциальных уравнений и задач с интегральным оператором. Однако при исследовании интегро-дифференциальной задачи требовалось, чтобы интегральный оператор был пропорционален малому параметру, что существенно сужает область применения метода расщепления. Метод регуляризации применяется для исследования дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (5; 6; 7). В этих работах подробно рассматриваются вопросы асимптотического анализа решений задач условиях различного поведения спектра предельного оператора, спектральных значений ядра интегрального оператора, быстро осциллирующих компонентов.

В данной работе метод регуляризации С.А. Ломова (3; 4) обобщается на задачи для интегро-дифференциального уравнения с быстроменяющимся ядром и с правой частью, зависящей от быстро осциллирующего показателя степени

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(\theta)d\theta} K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + \varepsilon f\,(y,t) + h(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, \quad y(0,\varepsilon) = y^0,\, t \in [0,T]. \tag{1}$$

Задача (1) рассматривается при следующих условиях:

1) $\mu(t), \beta'(t) \in \mathrm{C}^\infty([0,T],R),\ K(t,s) \in \mathrm{C}^\infty(0 \le s \le t \le T, R);$

2) $\mu(t) < 0, \beta'(t) > 0\ \ \forall t \in [0,T]\,;$