УДК 512.56, 512.57

С.М. Луцак

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: sveta_lutsak@mail.ru)

Сложность решеток квазимногообразий унарных алгебр

Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие — нет, изучался многими авторами. В статье рассмотрены две меры сложности решеток квазимногообразий. Проведено исследование сложности строения решеток квазимногообразий унарных алгебр. Изучена взаимосвязь между двумя мерами сложности решеток квазимногообразий. М.В. Швидефски и А. Замойска-Дженио была поставлена следующая проблема: существует ли не Q-универсальный класс, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий невычислимо? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий унарных алгебр, вследствие чего получен определенный результат относительно данной проблемы.

Ключевые слова: невычислимое множество, решетки квазимногообразий, Q-универсальность, унарный функциональный символ, нижняя полурешетка, унарная алгебра, сложность решетки.

1 Введение

В работе проводится исследование сложности решеток квазимногообразий унарных алгебр. Рассматриваются две хорошо известные меры сложности: *невычислимость* множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий и *Q-универсальность*. Напомним, что *унарной алгеброй* называется алгебра, сигнатура которой состоит только из одного унарного функционального символа. Квазимногообразия унарных алгебр изучались А.М. Нуракуновым в [1], см. также работы В.К. Карташова [2–4]. А.М. Нуракунов построил квазимногообразие K унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ является *невычислимым* [1], т. е. не существует алгоритма, позволяющего для данной конечной решетки определить, является ли она подрешеткой решетки $\mathrm{Lq}(K)$ или нет. Существование квазимногообразий с таким свойством свидетельствует об исключительной сложности строения решеток квазимногообразий, в связи с чем известная проблема Биркгофа-Мальцева [5–7] может оказаться сложнее, чем ожидалось: нахождение описания решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, даже для определенных классов алгебраических систем, может быть весьма сложным. Другой мерой сложности строения решеток квазимногообразий является *Q-универсальность*. Согласно М.В. Сапиру [8], квазимногообразие K будет *Q-универсальным*, если для любого квазимногообразия R конечной сигнатуры решетка $\mathrm{Lq}(R)$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $\mathrm{Lq}(K)$. В настоящее время известно много различных Q-универсальных квазимногообразий (см. [5, 8, 9]). Q-универсальность квазимногообразия унарных алгебр была доказана В.А. Горбуновым в работе [10], см. также работу А.В. Кравченко [11]. В [12] была установлена связь между двумя мерами сложности, а именно было доказано, что класс K *всех* систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он содержит подкласс R, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(R)$ невычислимо. В этой связи возникла следующая проблема [9, 12]: верно ли, что любой Q-универсальный класс систем K фиксированной сигнатуры содержит подкласс R, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(R)$ невычислимо? И существует ли класс K, не являющийся Q-универсальным, но, тем не менее, обладающий указанным выше свойством? Автором показано, что решетки квазимногообразий унарных алгебр удовлетворяют нетривиальному тождеству. Вследствие чего установлено существование континуума квазимногообразий K унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы, но, тем не менее, не являются Q-универсальными, см. теоремы 2 и 3.

2 Основные понятия

Частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ называется *нижней полурешеткой*, если любые два элемента $x, y \in S$ имеют точную нижнюю грань $x \wedge y$ [5; 9]. Двойственным образом определяется верхняя полурешетка. Частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ называется *решеткой*, если оно одновременно является верхней и нижней полурешетками [5; 10]. Решетка $\mathcal{S}$ называется *полной*, если любое подмножество $A \subseteq S$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани [5; 11]. Для нижней полурешетки $\mathcal{S} = \langle S; \wedge \rangle$ обозначим через $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{S}$. Для любых двух подполурешеток S_0, $S_1 \in \mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ множество

$$S_0 + S_1 = \{s_0 \wedge s_1 \mid s_0 \in S_0,\ s_1 \in S_1\}$$

является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{S}$, содержащей $S_0 \cup S_1$, т. е. решеточным объединением S_0 и S_1 в $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ [9].

Все рассматриваемые классы алгебраических систем являются *абстрактными*, т. е. замкнутыми, относительно изоморфизмов [13; 207]. Обозначим через $K(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ, через $S(K)$ — класс всех систем из $K(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из K [5; 24]. Пусть $R \subseteq K \subseteq K(\sigma)$. Тогда R называется *K-квазиэквациональным*, если

$$R = K \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$$

для некоторого множества Σ квазитождеств сигнатуры σ [5; 117].

Множество всех K-квазиэквациональных подклассов в K, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой K-квазимногообразий*, или *решеткой относительных квазимногообразий*, когда K легко восстанавливается из контекста и обозначается $\mathrm{Lq}(K)$ [9]. Если класс K является квазимногообразием, т. е. классом, определенным некоторым множеством квазитождеств сигнатуры σ, то K-квазиэквациональный подкласс называют подквазимногообразием K. Множество всех подквазимногообразий K, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой квазимногообразий* K и обозначается $\mathrm{Lq}(K)$ [1]. Отметим, что понятия здесь неопределенные, см. в [5; 13]. Также нам потребуются следующие утверждения. Пусть 2 обозначает двухэлементную решетку, а запись

$$\mathcal{A} \leq_s \prod\{\mathcal{A}_n \mid n \in N\}$$

означает, что система $\mathcal{A}$ является *подпрямым произведением* семейства систем $\mathcal{A}_n$, $n \in N$.

Теорема 1 [1, теорема 2]. Пусть M — бесконечное множество конечных нижних полурешеток. Тогда существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что

$$\mathrm{Lq}(K) \leq_s \prod\{\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in M\} \times 2.$$

Лемма 1 [14, утверждение 5.2]. Пусть L и F — множества, первое из которых вычислимо. Если множество $L \cap F$ невычислимо, то множество F также невычислимо.

3 Основной результат

Теорема 2. Существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо, но не Q-универсальное.

Схема доказательства теоремы 2. Сначала, используя теорему 1 и лемму 1, покажем, что существует квазимногообразие K унарных алгебр такое, что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо. Это означает, что нет алгоритма, который для данной конечной решетки определял бы, вложима ли эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ унарных алгебр или нет. Затем, используя лемму 2, покажем, что это квазимногообразие K не является Q-универсальным, поскольку Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273].

Доказательство теоремы 2. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ невычислимое и $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток типа «корона» (см. рис.).

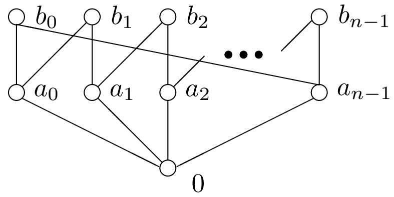

Рисунок. Нижняя полурешетка $\mathcal{K}_n$ типа «корона»

Согласно теореме 1, примененной к классу $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$, существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что

$$\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \times 2.$$

Согласно [1, лемма 17], решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ подпрямо неразложима для любого $n > 2$. Согласно [1, лемма 18], решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ вложима в $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $n, m > 2$). Пусть

$$L = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n > 2\} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n \in N\}.$$

Тогда $M = L \cap S(\mathrm{Lq}(K))$, поскольку решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ вложима $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ в точности тогда, когда $m \in N$, и, следовательно, решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ вложима в $\mathrm{Lq}(K)$ тогда и только тогда, когда $m \in N$, т. е. $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m) \in M$. Таким образом, решетка $\mathrm{Lq}(K)$ такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Прежде чем показать, что построенное квазимногообразие K унарных алгебр не является Q-универсальным, докажем лемму 2. Тождество H_n было рассмотрено в [15] и имеет вид

$$U_n = \bigvee_{0\leq i\leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0\leq i\leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ определены следующим образом:

$U_n = U_{0,n}$

$U_{n,n} = x_n$

$U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,n} = V_{i,0,n}, \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,i,n} = (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \qquad 0 \leq j < i \leq n-1,$

$W_{i,n} = W_{i,0,n}, \qquad 0 \leq i \leq n-2,$

$W_{i,i,n} = x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-2,$

$W_{i,j,n} = x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \qquad 0 \leq j < i \leq n-2.$

Тогда H_3

$$U_3 = \bigvee_{0\leq i\leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0\leq i\leq 1} W_{i,3},$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Обозначим $V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3})$. Тогда H_3 примет вид $U_3 = V_3$.

Лемма 2. Решетка $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого множества $N \subseteq \omega \setminus \{0,1,2\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству H_3.

Доказательство леммы 2. Сначала покажем, что решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3. Согласно [15, лемма 5.2], следующие неравенства выполняются в каждой решетке ($n \in Z^+$):

$$V_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-1;$$

$$W_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Если $n = 3$, то

$$V_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 2 \quad \text{и} \quad W_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 1.$$

Тогда $V_3 \leq U_3$. Осталось доказать, что $U_3 \leq V_3$. Все термы $x_0, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$ интерпретируем как подполурешетки «короны» $\mathcal{K}_n$, соответственно, $X_0, X_1, X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'$.

Пусть произвольно взятый элемент $a_0 \in K_n$ лежит в U_3. Тогда a_0, с одной стороны, лежит в X_0, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $U_{1,3} + X_1'$. Если элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $U_{1,3} + X_1'$, то найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in X_1'$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то

$$a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X_1').$$

Таким образом, $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{0,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Если пересечение строгое: $a_0 = a_1 \wedge b_1$, $a_0 < a_1$, $a_0 < b_1$, то из условия $a_1 \in U_{1,3}$ следует, что элемент a_1, с одной стороны, лежит в X_1, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $U_{2,3} + X_2'$. Если элемент a_1 лежит в $U_{2,3} + X_2'$, то найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in X_2'$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то

$$a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2').$$

Тогда если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2')$ и $b_1 \in X_1'$, то элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{1,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Если пересечение вновь строгое: $a_1 = a_2 \wedge b_2$, $a_1 < a_2$, $a_1 < b_2$, то из условия $a_2 \in U_{2,3}$ следует, что элемент a_2, с одной стороны, лежит в X_2, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $X_3 + X_3'$. Если элемент a_2 лежит в $X_3 + X_3'$, то найдутся элементы $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$, такие что $a_2 = a_3 \wedge b_3$. Если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то

$$a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3').$$

Тогда если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3')$, $b_2 \in X_2'$, то элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{2,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Когда пересечение строгое: $a_2 = a_3 \wedge b_3$, $a_2 < a_3$, $a_2 < b_3$, получим, что $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $b_2 \in X_2'$, $a_2 \in X_2$ и $a_2 = a_3 \wedge b_3$, где $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$. Имеем цепь

$$a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \quad (a_0 < a_1, a_1 < a_2, a_2 < a_3)$$

длины 3, чего не может быть, поскольку в «короне» $\mathcal{K}_n$ длина максимальной цепи равна 2. Полученное противоречие завершает доказательство того факта, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3. Тогда, поскольку тождества мультипликативно устойчивы [13; 189], решетка $\prod_{n \in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ тоже будет удовлетворять H_3.

Лемма 2 доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Поскольку $\prod_{n \in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ удовлетворяет H_3, согласно доказанной выше лемме 2, то H_3 будет выполняться и на $\mathrm{Lq}(K)$, так как известно, что тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам [13; 189]. Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273], вследствие чего построенное квазимногообразие K унаров не будет Q-универсальным.

Теорема 2 доказана.

Поскольку число невычислимых подмножеств счетного множества континуально, будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Существует континуум квазимногообразий K унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы, но, тем не менее, не Q-универсальны.

Заметим, что результат, аналогичный теоремам 2 и 3, справедлив и для классов унарных алгебр, не являющихся квазимногообразиями. Этот результат будет следовать из [9, теорема 3.4], [1, лемма 3] и леммы 2. Вопрос о сложности решеток квазимногообразий изучался многими авторами. В литературе есть примеры классов K, таких что множества всех конечных подрешеток решеток $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы [1, 9, 12, 14]. Также известно очень много различных Q-универсальных классов [5; 274]. Предполагалось, что имеется связь между этими мерами сложности [9, 12]. Однако автором показано, что класс K систем фиксированной сигнатуры, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо, может быть и не Q-универсальным. Найден континуум классов (квазимногообразий) K унарных алгебр, для которых решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ согласно одной мере являются сложными, а согласно другой — нет.

Список литературы

1 *Nurakunov A.M.* Unreasonable lattices of quasivarieties // Intern. Journal Algebra Comput. — 2012. — No. 22(3). — P. 1–17.

2 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. — 1980. — № 27. — С. 5–12.

3 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. — 1980. — № 19. — С. 106–120.

4 *Карташов В.К.* Решетки квазимногообразий унаров // Сиб. мат. журн. — 1980 — № 19. — С. 346–357.

5 *Горбунов В.А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Науч. кн., 1999. — 368 с.

6 *Birkhoff G.* Universal algebra // Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945). — Toronto: The University of Toronto Press, 1946. — P. 310–326.

7 *Мальцев А.И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Тр. Междунар. мат. конгр. (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.

8 *Sapir M.V.* The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Universalis. — 1985. — No. 21. — P. 172–180.

9 *Швидефски М.В.* О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — № 3. — С. 381–398.

10 *Gorbunov V.A.* Structure of lattices of varieties and of lattices of quasivarieties: Similarity and difference. III // Algebra Logic. — 1995. — No. 34. — P. 359–370.

11 *Kravchenko A.V.* Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras // Siberian Adv. Math. — 2002. — No. 12. — P. 63–76.

12 *Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A.* Lattices of subclasses. II // Intern. Journal Algebra Comput. — 2014. — No. 24. — P. 1099–1126.

13 *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

14 *Нуракунов А.М.* Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — № 53. — С. 372–400.

15 *Semenova M.V., Wehrung F.* Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // Intern. Journal Algebra Comput. — 2003. — Vol. 13. — No. 5. — P. 543–564.

С.М. Луцак

Унарлық алгебра квазикөпбейне торларының күрделілігі

Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау керек және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделі немесе басқа өлшеміне сәйкес кашан күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі болмайды көптеген авторлар жұмыстарында зерттелген. Мақалада квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемі қарастырылды. Унарлық алгебра квазикөпбейне торлар құрылысы күрделілігі жан-жақты талданды. Квазикөпбейне торлардың күрделілігінің екі өлшемі арасындағы байланыс зерттелді. Кезінде М.В. Швидефски және А. Замойска-Джениo де бұл мәселеге тоқталған. Q-әмбебап болып табылмайтын, бірақ иррационалды болып табылатын класс бар ма? Унарлық алгебралар квазикөпбейне торларында тривиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді; сол әрекет арқылы белгілі бір нәтиже алынды.

Кілт сөздер: орындалмайтын жиын, квазикөпбейне, тор, Q-әмбебаптылық, унарлы функционалды символ, торлардың күрделілігі.

S.M. Lutsak

The complexity of quasivariety lattices of unary algebras

The question of what is considered as the complexity of the lattice of quasivarieties and what lattices of quasivarieties are complex according to some degree of complexity, and which are not, has been studied by many authors. The paper considers two measures of complexity of lattices of quasivarieties. A study is made of the complexity of the lattice structure of quasivarieties of unary algebras. The relationship between two measures of the complexity of lattices of quasivarieties is studied.M.V. Schwiedefsky and A. Zamoyska-Jenio, the following problem was posed: is there a non-Q-universal class for which the set of all finite sublattices of the lattice of quasivarieties is not computable? The author has proved the non-trivial identity satisfying on the lattices of quasivarieties of unary algebras, as a result of which a certain result is obtained with respect to this problem.

Keywords: noncomputable set, lattices of quasivarieties, Q-universality, unary function symbol, lower semi-lattice, unary algebra, the complexity of the lattice.

References

1 Nurakunov A.M. *Internat. Journal Algebra Comput.*, 2012, 22(3), p. 1–17.
2 Kartashov V.K. *Math. Notes*, 1980, 27, p. 5–12.
3 Kartashov V.K. *Algebra Logic*, 1980, 19, p. 106–120.
4 Kartashov V.K. *Siberian Math. Journal*, 1980, 19, p. 346–357.
5 Gorbunov V.A. *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999, 368 p.
6 Birkhoff G. *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, Toronto: The University of Toronto Press, 1946, p. 310–326.
7 Maltsev A.I. *Proceedings of the Intern. Mathematical Congress*, Moscow: Mir, 1968, p. 217–231.
8 Sapir M.V. *Algebra Universalis*, 1985, 21, p. 172–180.
9 Schwidefsky M.V. *Algebra Logic*, 2015, 54, 3, p. 381–398.
10 Gorbunov V.A. *Algebra Logic*, 1995, 34, p. 359–370.
11 Kravchenko A.V. *Siberian Adv. Math.*, 2002, 12, p. 63–76.
12 Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2014, 24, p. 1099–1126.
13 Maltsev A.I. *Algebraic Structures*, Moscow: Nauka, 1970, 392 p.
14 Nurakunov A.M. *Algebra Logic*, 2014, 53, p. 372–400.
15 Semenova M.V., Wehrung F. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2003, 13, 5, p. 543–564.