УДК 517.956 /518.68

О спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов высокого порядка с операторными коэффициентами

About spectral properties of one class of differential operators of the high order with operational factors

Муратбеков М.Б.[1], Биргебаев А.[2], Тучин А.В.[1], Серикбаев Ж.А.[3]

[1]Таразский государственный педагогический институт (e-mail: tuchinaw@mail.ru);
[2]Национальный педагогический университет им. Абая, Алматы;
[3]Таразский инновационно-гуманитарный университет

Мақалада $C_0^\infty(R,H)$ кеңістігінің толықтырылуы болатын H_1 кеңістігінде, $<u,v>_{H_1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}<u,v>_H\,dt$ нормасы бойынша H — сепарабельді гильберт кеңістігі болған жағдайда, $Lu\equiv(-1)^m u^{(2m)}(y)+$ $+k(y)Au+ia(y)A^\alpha u+c(y)u$ дифференциалдық операторы зерттелген, мұндағы A операторы — H кеңістігіндегі оң анықталған және өз-өзіне түйіндес оператор. L операторы H_1 кеңістігі мағынасында тұйықталады. $\left(a(y)\geq v_0>0\right.$, $c(y)\geq v>0$, $a(y)$ және $c(y)$ — үзіліссіз функциялар шарттар негізінде L операторының спектрінің дискреттілік критерийі алынған. L операторының үзіліссіз спектрі бар болуы үшін коэффициенттерге шарттар табылған.

In space H_1 being replenishment $C_0^\infty(R,H)$, where H separable Gilbert's space, on norm $<u,v>_{H_1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}<u,v>_H\,dt$, investigate the differential operator $Lu\equiv(-1)^m u^{(2m)}(y)+k(y)Au+ia(y)A^\alpha u+$ $+c(y)u$ where A positively certain self-interfaced operator in H. Operator's L space supposes short circuit in sense of space H_1 is investigated. Under conditions, $\left(a(y)\geq v_0>0\right.$, $c(y)\geq v>0$, $a(y)$ and $c(y)$ continuous functions the criterion of step-type behavior of a spectrum of operator L is received. Further conditions on factors at which the continuous spectrum of operator L, will be not empty are received.

Формулировка основных результатов. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $C_0^\infty(R,H)$ множество бесконечно гладких финитных функций, определенных на $R(-\infty,+\infty)$ со значением в H.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu\equiv(-1)^m u^{(2m)}(y)+k(y)Au+ia(y)A^\alpha u+c(y)u\,, \tag{1}$$

где $u(y)\in C_0^\infty(R,H)$, A — положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с вполне непрерывной резольвентой, $\alpha\in[\frac{1}{2},1]$, $k(y)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная функция в R, $k(0)=0$ и $yk(y)>0$ при $y\neq0$.

Пусть выполнено условие:

i) $|a(y)|\geq\delta_0>0$, $c(y)\geq\delta>0$ — непрерывные функции в R.

Нетрудно показать, что оператор (1) допускает замыкание в смысле H_1, и его замыкание также будем обозначать через L. Здесь H_1 — гильбертово пространство, полученное пополнением множества $C_0^\infty(R,H)$ по норме, порожденной скалярным произведением $<u,v>_{H_1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}<u,v>_H\,dt$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнено условие i), и $c(y)$ — ограниченная функция, и пусть $\lambda=0$ является собственным значением оператора A с конечной кратностью. Тогда непрерывный спектр оператора L не пуст.

Теорема 2. Пусть выполнено условие i). Тогда дискретный спектр оператора L не пуст, если справедливо равенство

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_y^{y+\omega} c(t)dt=\infty . \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие i), и пусть оператор A положительно определенный, с вполне непрерывным обратным. Тогда спектр оператора L дискретен, если и только если для любого $\omega>0$

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_y^{y+\omega} c(t)dt=\infty \tag{3}$$

или

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_y^{y+\omega} |a(t)|dt=\infty . \tag{4}$$

Об одном одномерном дифференциальном операторе высокого порядка. Рассмотрим дифференциальный оператор $lu=(-1)^m u^{(2m)}(y)+c(y)u$, первоначально определенный на $C_0^\infty(R)$, с дальнейшим замыканием этого оператора в пространстве $L_2(R)$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть выполнено условие i) и пусть $c(y)$ — ограниченная функция. Тогда спектр оператора l чисто непрерывный.

*Доказательство***.** Обозначим через l_b оператор, определенный равенством $l_b=(-1)^m u^{(2m)}+bu$ на $C_0^\infty(R)$, где $b=\sup\limits_{t\in R} c(t)$. Оператор l_b в пространстве $L_2(R)$ допускает замыкание. В областях $D(l),D(l_b)$ задания операторов l, l_b введем новые метрики, полагая, что

$$|u|_l=<lu,u>, \qquad u\in D(l)\,;\ |u|_{l_b}=<l_b u,u>, \qquad u\in D(l_b)\,,$$

и замыкаем $D(l),D(l_b)$ в этих метриках. Полученные новые гильбертовы пространства обозначим H_l, H_{l_b}. Нетрудно видеть, что $H_{l_b}\subset H_l$ и $|u|_{l_b}\ge|u|_l$, будем считать, что $l_b\ge l$. Здесь l и l_b — положительные операторы.

Из общих теорем компактности следует: если спектр оператора l дискретен, то спектр оператора l_b также дискретен; если спектр оператора l_b непрерывный, то спектр оператора l также непрерывный. Известно из спектральной теории дифференциальных операторов следующее

Утверждение. Спектр оператора l_b непрерывный.

Вывод: Спектр оператора l непрерывный.

Лемма доказана.

Рассмотрим оператор $l_t u=(-1)^m u^{(2m)}+(tk(y)+it^\alpha a(y)+c(y))u$, где $u\in D(l_t)$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$c\|l_t u\|_2^2\ge\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2+c\Big((y)+|t|^\alpha|a(y)|\Big)|u|^2\right]dy , \tag{5}$$

для всех $u\in D(l_t)$, где $c>0$ — постоянное число, не зависящее от t, u.

Доказательство. Здесь и дальше, не ограничивая общности, будем считать $|a(y)|\ge1$, $c(y)\ge1$. Рассмотрим скалярное произведение

$$<l_t u,u>=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2+(tk(y)+it^\alpha a(y)+c(y))|u|^2\right]dy , \tag{6}$$

где $u\in C_0^\infty(R)$. Отсюда, так как $a(y)$ не меняет знака, имеем:

$$|<l_t u,u>|\ge\left|t^\alpha\right|\int_{-\infty}^{\infty}|a(y)||u|^2dy . \tag{7}$$

Пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon > 0$, из неравенства (7) находим:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|l_t u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 \ge \frac{1}{2}|t|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty}|a(y)|^2|u|^2\,dy + \frac{1}{2}\delta_0|t|^\alpha\|u\|_2^2 .$$

Из последнего неравенства, учитывая условие i) и $d < t < \infty$, находим следующую оценку:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|l_t u\|_2^2 \ge \frac{1}{2}|t|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty}|a(y)|^2|u|^2\,dy. \tag{8}$$

Далее из равенства (6) следует, что

$$\begin{aligned} |< l_t u, u >| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2 + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))|u|^2\right]dy\right| \ge \\ &\ge \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2 + (tk(y) + c(y))|u|^2\right]dy\right| \ge \\ &\ge \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2 + c(y)|u|^2\right]dy\right| - |t|\left|\int_{-\infty}^{\infty}|k(y)||u|^2\,dy\right|. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь, учитывая условие Коши с $\varepsilon > 0$, несложно проверить, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|l_t u\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|u^{(m)}\right|^2 + c(y)|u|^2\right)dy - |t|\int_{-\infty}^{\infty}|k(y)||u|^2\,dy . \tag{10}$$

Пользуясь неравенством Коши – Буняковского и условием i), из неравенства (7) получаем, что

$$\|l_t u\|_2^2 \ge |t|^{2\alpha}\delta_0^2\|u\|_2^2. \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), находим:

$$c\|l_t u\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|u^{(m)}\right|^2 + c(y)|u|^2\right)dy . \tag{12}$$

Из неравенств (8) и (12) имеем $c(\varepsilon,\delta_0)\|l_t u\|_2^2 \ge \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|u^{(m)}\right|^2 + (c(y) + |t|^\alpha|a(y)|)|u|^2\right]dy$, где $c(\varepsilon,\delta_0) > 0$.

Лемма 3. Пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка

$$\left\|l_t^{-1}\right\|_2^2 \le \frac{c}{t^{2\alpha}}, \tag{13}$$

где $0 < d < t$, $c > 0$ не зависит от t, $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$.

Доказательство леммы 3 следует из леммы 2.2 [1].

Лемма 4. Пусть выполнено условие i). Тогда оператор l_t^{-1} вполне непрерывен, если и только если справедливо равенство (2).

Доказательство. Для доказательства используем метод, предложенный в работах [2, 3] для операторов смешанного типа.

Необходимость. Пусть условие леммы 4 не выполнено. Тогда существует последовательность интервалов $Q_d(y_j) \subset R$ таких, что $\sup \int_{Q_d(y_i)} c(t)dt < c$, где $d > 0$, т.е. когда интервал $Q_d(y_j)$, сохраняя длину, уходит в бесконечность. Пусть $\omega(y) \in C_0^\infty(Q(0))$, и рассмотрим множество функций таких, что $u_j(y) = \omega(y - y_i)$. Для этих функций нетрудно установить следующее неравенство:

$$\left\|(-1)^m u_j^{(2m)}(y) + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u_j\right\|_2 \le c < \infty \tag{14}$$

при $0 < t < N$, где N — конечное число, c не зависит от j. Несложно проверить: из леммы 3 следует, что $\left\|l_t^{-1}\right\| \to 0$ при $t \to \infty$. Последнее свойство учитывалось при доказательстве неравенства (14). Из неравенства (14) видно, что $F_j(y) \in L_2(R)$, $supp\, F_j(y) \subset Q_d(y_i)$, где

$F_j = (-1)^m u_j^{(2m)} + (tk(y) + it^{\alpha} a(y) + c(y))u$. Теперь нетрудно показать, что последовательность $\{F_j(y)\}$ слабо сходится к нулю. Действительно, для любого $v \in L_2(R)$

$$\left| < F_j(y), v > \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_j(y) v(y) dy \right| = \left| \int_{Q_d(y_j)} F_j(y) v(y) dy \right| \le$$

$$\le \left(\int_{Q_d(y_j)} F_j^2(y) dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{Q_d(y_j)} v^2(y) dy \right)^{1/2} \le c \left(\int_{Q_d(y_j)} v^2(y) dy \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Очевидно, что $\int_{Q_d(y_j)} v^2(y) dy \to 0$ при $j \to \infty$, так как $v \in L_2(R)$. Отсюда и из (15) следует, что последовательность $\{F_j(y)\} \to 0$ слабо при $j \to \infty$. Нетрудно проверить, что

$$\left\| u_j \right\|_2 = c > 0. \quad (16)$$

Поскольку, если оператор l_t^{-1} компактный, то последовательность $\{u_j\}$ должна сходиться к нулю в норме $L_2(R)$. А это в силу (16) невозможно. Необходимость доказана.

Достаточность. Повторяя выкладки и рассуждения, использованные в подразделе 2 из [1], имеем $R(l_t^{-1}) \subset L_2^m(R, c(y))$, где $L_2^m(R, c(y))$ — пополнение $C_0^{\infty}(R)$ по норме

$$\|u\|_{L_2^m(R, c(y))} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| u^{(m)} \right|^2 + c(y) \left| u \right|^2 \right) dy \right)^{1/2}.$$

В силу результатов работ [2, 3] любое ограниченное множество в $L_2^m(R, c(y))$ компактно в $L_2(R)$, если и только если выполнено условие работы [3], т.е.

$$C^*(y) \to \infty \text{ при } |y| \to \infty, \quad (17)$$

где $C^*(y) = \inf\{d^{-1} : d^{1-2m} \ge \int_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}} c(t) dt\}$. Отсюда следует, что нам достаточно показать эквивалентность условий (17) и (2). Пусть не выполнено (17), тогда существует последовательность точек y_n, $n = 0,1,2,...$, и постоянные c такие, что $C^*(y_n) \le c$. В силу равенства $d_n^{1-2m} = \int_{y_n - \frac{d_n}{2}}^{y_n + \frac{d_n}{2}} c(t) dt$, которое следует из определения $C^*(y)$, получаем, что существуют интервалы Δ_n, уходящие в бесконечность, сохраняя длину, для которых $\int_{\Delta_n} c(t) dt < c_1 < \infty$. Последнее неравенство показывает, что условие (2) не выполнено. Обратно: пусть не выполнено условие (2). Тогда существуют некоторые непересекающиеся интервалы Δ_n, сохраняя длину, уходящие в бесконечность. Из определения $c^*(y)$ получаем, что $c^*(y_n) \le c$, где y_n — центр Δ_n. Это означает, что (17) не выполнено, следовательно, (2) и (17) эквивалентны. Достаточность леммы 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнено условие i), и пусть $d < t < \infty$, $d > 0$. Тогда оператор l_t^{-1} вполне непрерывен, если и только если для любого $\omega > 0$

$$\lim_{|y| \to \infty} \int_{y}^{y+\omega} c(t) dt = \infty \quad (3)$$

или

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{y}^{y+\omega} a(t)dt = \infty . \tag{4}$$

Доказательство. Заметим, что коэффициент при i $(i^2 = -1)$ ни при каких t не обращается в нуль, так как t меняется на интервале (d,∞). Это означает, что при исследовании спектральных свойств оператора l_t^{-1} мы должны учитывать поведение обоих коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$. Рассмотрим сначала случай (3). В этом случае, повторяя рассуждения и выкладки, использованные при доказательстве леммы 4, получим доказательство леммы 5.

Рассмотрим случай (4).

Необходимость. Для доказательства предположим от противного: пусть условия леммы не выполняются. Тогда существует последовательность интервалов $Q_d(y_i) \subset R$ таких, что $\sup \int_{Q_d(y_i)} |a(y)|dt < c$, где $d > 0$. Интервал $Q_d(y_i)$, сохраняя длину, уходит в бесконечность. Пусть $\omega(x) \in C_0^\infty(Q(0))$, и рассмотрим множество функций таких, что $u_j(y) = \omega(y - y_j)$. Тогда нетрудно установить, что $\left\|(-1)^m u_j^{(2m)} + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u_j\right\|_2^2 \le c < \infty$, где c — не зависит от *j*. Положим

$$F_j = (-1)^m u_j^{(2m)} + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u \,,\; supp\, F_j(y) \subset Q_d(y_i) .$$

Отсюда видно, что $F_j(y)$ слабо сходится к нулю. Доказательство необходимости завершается точно так же, как в лемме 4.

Достаточность. Из результатов леммы 2 следует, что

$$R(l_t^{-1}) \subseteq W_{2,a,c}^m(R), \tag{18}$$

где $W_{2,a,c}^m(R)$ — пространство функций с нормой

$$\left\|u : W_{2,a,c}^m\right\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\left|u^{(m)}\right|^2 + (|a(y)| + c(y))|u|^2]\; dy\right)^{1/2} .$$

Нетрудно проверить, что

$$W_{2,a,c}^m(R) \subset W_{2,a}^m(R) . \tag{19}$$

Действительно, пусть $u(x) \in W_{2,a,c}^m(R)$, тогда справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\left|u^{(m)}\right|^2 + |a(y)||u|^2]dy \le \int_{-\infty}^{\infty} [\left|u^{(m)}\right|^2 + (|a(y)| + c(y))|u|^2]\; dy .$$

Последняя оценка доказывает включение (19). Отсюда и из (18) имеем:

$$R(l_t^{-1}) \subseteq W_{2,a}^m(R) . \tag{20}$$

Далее, из (20), используя рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 4, получим доказательство достаточности.

Доказательство теорем о непрерывности и дискретности спектра

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\{e_n\}$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A. Тогда для любого $u(y) \in H$ справедливо равенство

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)e_n \,,\; \|u(y)\|_{H_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(y)\|_2^2 .$$

Непосредственно легко проверяются следующие равенства:

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(y)e_n \,;\; A^\alpha u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha u_n(y)e_n .$$

Отсюда видно, что разделение переменных в спектральной задаче $Lu = \lambda u$ приводит к следующим спектральным задачам:

$$-u_n^{(2m)}(y) + (k(y)\lambda_n + ia(y)\lambda_n^\alpha + c(y))u_n = \lambda u_n(y),\; n = 1,2,3,... \tag{21}$$

Если λ — точка спектра оператора L, то λ является точкой спектра одного из операторов (20). И наоборот, если λ — точка спектра одного из операторов (21), то λ является точкой спектра оператора L. Теперь, если воспользоваться предположением теоремы 1 о том, что $\lambda = 0$ является собственным значением конечной кратности, то теорема 1 легко следует из леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Аналогично рассуждая и пользуясь леммой 2, получаем доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. В теореме 3 мы предполагали, что оператор A — положительно определенный, самосопряженный, с вполне непрерывным обратным. С этим связано то обстоятельство, что наименьшее собственное число этого оператора отлично от нуля. Теперь доказываемая теорема следует из леммы 4.

References

1. *Muratbekov M., Serikbaev Zh.* About properties of decisions of one class of the differential equations with operational factor // Mathematical magazine. — 2008. — T. 8 — № 1 (27). — P. 64–74.
2. *Muratbekov M.B.* Two-sides of the distribution function of s-values of class of mixed type differential operators. Complex Variables and Elliptic Equations. — University of Delaware, Newark, USA and RWTH Aachen, Germany. — 2007. — Vol. 52. — № 12. — P. 1121–1144.
3. *Otelbaev M.* Estimation of Storm–Liuville operators spectrum. — Alma-Ata: Gylym, 1990. — 192 p.

УДК 517.9

Оценки резольвент-корректных дифференциальных операторов на отрезке

Estimations resolvents correct differential operators on the interval

Нурахметов Д.Б., Кангужин Б.Е.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (e-mail: daulet_arg@mail.ru, dauletkaznu@gmail.com)

Мақалада Биркгоф бойынша регулярлы ішкі шекаралық шарттар деп аталатын шекаралық шарттардың түрі нақтылы көрсетіліп, осындай шарттарға бағынатын, кесіндідегі корректі дифференциалдық операторлардың резольвенталары бағалаулары зерттелді. Көрнекілік үшін барлық нәтижелер кесіндіде реті тақ біртекті емес айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін көрсетілді. Жұп рет үшін де ұқсасынша қарастырылды. Қорытындыда кесіндіде реті тақ біртекті емес айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін резольвенталарының бағалауы келтірілді. Жұмыс әдісі бойынша [2, 3] еңбектерге жақын.

In this paper we select those boundary conditions, which we call regular internal boundary conditions for Birkhoff, and investigate the estimations of the resolvents of correct differential operators on the interval, subordinates in such conditions. For clarity, all results are illustrated by the non-homogeneous differential equations of odd order with variable coefficients on the interval. Similarly, study and even order. In conclusion, we present estimates of the resolvent for the non-homogeneous differential equation of odd order with variable coefficients on the interval. The method of ideologically similar to the methods of [2, 3].

1. Постановка задачи. В функциональном пространстве $L_2[0,b]$ рассмотрим оператор L_0, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x)$$

и регулярными двухточечными краевыми условиями [1]:

$$V_j(y) = \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \sum_{\nu=0}^{k_j-1} \alpha_{j\nu} y^{(\nu)}(0) + \beta_j y^{(k_j)}(b) + \sum_{\nu=0}^{k_j-1} \beta_{j\nu} y^{(\nu)}(b) = 0,\ j = 1,...,n,$$

$$n-1 \ge k_1 \ge k_2 \ge ... \ge k_n \ge 0,\ k_{j+2} < k_j.$$