$$= \lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial v(x_0+\delta,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x_0-\delta,y)}{\partial x}\right]dy+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial v(x,y_0+\delta)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,y_0-\delta)}{\partial y}\right]dx\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[w(x_0-\delta,y)-w(x_0+\delta,y)\right]dy=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[v(x_0-\delta,y)-v(x_0+\delta,y)\right]dy;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[w(x,y_0-\delta)-w(x,y_0+\delta)\right]dx=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[v(x,y_0-\delta)-v(x,y_0+\delta)\right]dx,$$

где $v(x,y)=K(f)$ или $v(x,y)=K(\Delta w)$.

С другой стороны, из представления (30) следует, что $W(x,y,f)=u(x,y,f)+v(x,y)$ также удовлетворяет соотношениям (31). Поэтому из теоремы единственности вытекает, что $W(x,y,f)=w(x,y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (31). Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

1. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функц. анализ и его приложения. — 1986. — Т. 20. — № 3. — С. 55–65.
2. *Павлов Б.С.* Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат.наук. — 1987. — Т. 42. — № 6(258). — С. 99–131.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.

УДК 621.3.083

Т.Л.Тен[1], Г.Д.Когай[2]

[1]Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза;
[2]Карагандинский государственный технический университет

ПРОГРАММНО-ЦЕЛЕВОЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Мақалада ақпараттық жүйелерді көп деңгейлі иерархияларын жобалаудың программа-мақсатты әдісі қарастырылған. Жүйелік қызметтің негізгі әдістерінің бірі құрылымның элементтерімен шешетін максималды идеалына сәйкес келетін бар құрылымды иерархияға айналдыру болып табылады. Бар құрылымды талдайтын әдіс құрастырылған және одан оңтайлы иерархия қалыптастыру, онда мақсатты жүйе иерархиясының максималды дәрежесінде басқарудың тапсырмаларын үлестіру қарастырылған.

Program-special method of multilevel information system's development is considered at this work. One of the main appointment of system activity is reformation of existent structure to hierarchy, the limit equal to ideal {Sa}, solvable by structure elements, making either layer. There is developed the method of existent structure's analysis and optimal hierarchy's formation from it, where the classification of management problems the limit accord to hierarchy of system's aims.

Информационно-измерительные системы (ИИС) имеют иерархическую структуру управления, это является объективным требованием управления в соответствии с целями. Однако нередко фактическая структура, проявляющаяся при функционировании, отличается от нормативной (соответствующей дереву целей). Это объясняется, прежде всего, тем, что в современных ИИС происходит постоянная корректировка целей управления [1].

Структура управления ИИС, сформировавшаяся без использования приемов системной деятельности, как правило, не полностью соответствует программно-целевому управлению. Это обстоятельство, которому часто не придают значения, является основным фактором принятия нерациональных, несогласованных решений в ИИС, что, в конечном счете, приводит к неоправданным потерям. Пусть существующая структура управления описана ориентированным графом $G(Z, \mathrm{W})$, где Z — множество структурных элементов системы управления (вершин графа), а W — множество управляющих связей в системе (дуг графа). При этом дуга $(\omega_1, \omega_2) \in W$, если структурный элемент ω_2 находится под управлением ξ_2. Естественно предполагать, что G является ориентированным графом — без контуров, так как управляющие воздействия направлены в одну сторону — от «вышестоящих» структурных элементов к «нижестоящим». Граф G, как правило, отличается от иерархического дерева с элементами S_α. Одним из основных приемов системной деятельности является преобразование существующей структуры в иерархию, максимально соответствующую идеальной $\{S_\alpha\}$.

Упорядоченное разбиение $R = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ множества вершин графа G на попарно непересекающиеся множества $Z_k \subseteq Z$ будем называть многослойной иерархией, если не существует дуг $(\xi_1, \xi_2)) \in W$ таких, что $\xi_1 \in Z_k$, $\xi_2 \in Z_j$ и $k > j$.

Существует много способов разбиения множества Z на многослойную иерархию, однако нас интересуют разбиения, учитывающие характер задач, решаемых структурными элементами, образующими тот или иной слой. Как было сказано, каждой цели ИИС C_α можно поставить в соответствие семейство задач $\{D^{\alpha_j}\}$, $j = 1, ..., \mu_\alpha$, связанных с реализацией этой цели. Поставим задачу определения соответствия задач, решаемых элементами существующей структуры управления $G = (Z, W)$, множеству задач, решение которых необходимо для реализации соответствующих целей системы управления:

$$D = \{D^{\alpha_j} : \alpha \in A, j = 1, ..., \mu_\alpha\}. \tag{1}$$

Пусть $p^{\alpha_j}(\xi)$ — относительная загрузка элемента $\xi \in Z$ решением задачи D^{α_j} в (1) так, что

$$\sum_{\alpha \in A} \sum_{j=1}^{\mu_\alpha} p^{\alpha_j}(\xi) = 1. \tag{2}$$

Используя относительную загруженность элемента задачами, относящимися к той или иной цели, можно определить вектор распределения задач, решаемых элементом ξ, по уровням иерархии, соответствующей дереву целей:

$$P(\xi) = (P_1(\xi), P_2(\xi), ..., P_L(\xi)), \tag{3}$$

где $P_\lambda(\xi) = \sum_{\alpha \in A, |\alpha| = \lambda} \sum_{j=1}^{\mu_\alpha} p^{\alpha_j}(\xi)$ — относительная загруженность элемента ξ решением задач управления, соответствующих целям λ-го уровня дерева целей.

Весьма важной представляется задача поиска разбиения множества структурных элементов ИИС по уровням иерархии, задаваемой деревом целей.

В простейшем виде эта задача сводится к определению многослойной иерархии $R = (Z_1, Z_2, ..., Z_L)$ множества вершин графа $G(Z, W)$, такого, что при этом максимизируется следующий функционал:

$$\Phi_L(R) = \sum_{\lambda=1}^{L} \sum_{\xi \in Z_\lambda} P_\lambda(\xi). \tag{4}$$

Если не учитывать сложившуюся структуру управления, задаваемую графом G, то очевидно, что максимум функционала (4) достигается на разбиении $R^* = (Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_L^*)$, которое определяется следующим образом:

$$Z_1^* = \left\{\xi \in Z : P_1(\xi) = \max_\lambda P_\lambda(\xi)\right\},$$

$$Z_{k+1}^* = \left\{\xi \in \bar{Z}_k^* : P_{k+1}(\xi) = \max_{\lambda > k} P_\lambda(\xi)\right\}, \text{ для } k = 1, 2, ..., L-1, \tag{5}$$

где $\bar{Z}_k^* = Z \setminus Z_1^* \setminus ... \setminus Z_k^*$.

Разбиение Z на многослойную иерархию, не нарушающую отношение порядка, задаваемое графом G, существенно усложняет решение поставленной задачи.

Пусть $I^L(G)$ — множество всех разбиений графа G на многослойную иерархию вида R, тогда обозначим

$$f_L(Z) = \max_{R \in I_L(G)} \Phi_L(R). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что $f_L(Z)$ удовлетворяет функциональному уравнению Беллмана:

$$f_L(Z) = \max_{X \subseteq Z;\ \Theta(X)=X} \left\{ \sum_{\xi \in X} P_L(\xi) + f_{L-1}(Z \setminus X) \right\}, \tag{7}$$

где $\Theta(X)$ для произвольного подмножества $X \subseteq Z$ есть множество вершин графа G, для которых существует путь из X.

При решении реальных задач определения структур управления размерность графа G может быть большой, тогда процедура решения задачи методом динамического программирования становится не только неэффективной, но и невозможной. Действительно, классическая схема динамического программирования приводит к перебору большого количества подмножеств X при вычислении (7). Пусть $I^L(G)$ — множество всех иерархий графа G, состоящих из L уровней. Рассматривается задача нахождения иерархии R^*, максимизирующая функционал (4). Введем на множестве $I^L(G)$ отношение порядка: будем считать, что $R^1 \le R^2$ (R^1 «не выше « R^2), если для $k = 1, 2, ..., L-1$, имеет место следующее соотношение:

$$\overline{Z_k^1} \subseteq \overline{Z_k^2}, \text{ где } \overline{Z_k} = Z \setminus Z_1 \setminus ... \setminus Z_k. \tag{8}$$

Соотношение $R^1 < R^2$ (R^1 «ниже» R^2) будет означать, что $R^1 \le R^2$, но $R^1 \ne R^2$. Множество $I^L(G)$ является решеткой: любое его подмножество I имеет точную нижнюю — $R' = \min I$ и точную верхнюю — $R'' = \max I$ границы в смысле введенного отношения порядка. Действительно, R' и R'' определяются следующим образом:

$$\bar{Z}'_k = \bigcap_{R \subset I} \bar{Z}_k, \ \ \bar{Z}''_k = \bigcup_{R \subset I} Z_k. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что для любых $R^1, R^2 \in I^L(G)$ имеет место следующее соотношение:

$$\Phi(R^1) + \Phi(R^2) = \Phi(\min\{R^1,\ R^2\}) + \Phi(\max\{R^1,\ R^2\}). \tag{10}$$

Обозначим теперь $I_0^L(G)$ — множество всех оптимальных в смысле (4) разбиений, тогда, если $R^1, R^2 \in I_0^L(G)$, то с учетом оптимальности рассматриваемых иерархий и (10) имеет место следующее:

$$\Phi(\min\{R^1, R^2\}) = \Phi(\max\{R^1,\ R^2\}) = \Phi(R^1) = \Phi(R^2)\}). \tag{11}$$

По индукции получаем, что нижняя и верхняя границы любого подмножества $I_0^L(G)$ также являются оптимальными иерархиями, а значит, множество $I_0^L(G)$ также является решеткой в смысле введенного порядка. Это позволяет использовать следующую схему поиска оптимальной, в смысле (4), иерархии, используя упорядоченность, задаваемую графом $G(Z,U)$. Зададимся целью найти нижнюю границу множества всех оптимальных иерархий, обозначим ее R^*.

Шаг 1. В качестве начального приближения выбираем иерархию $R^0 = I^L(G)$ такую, что

$$R^* \le R^0 = I^L(G). \tag{12}$$

Шаг 2. Если построена иерархия R^k, то переход к R^{k+1} осуществляется с помощью оператора $A: R^{k+1} = A(R^k)$ такого, что

$$R^* \le A(R^k) \le R^k, \tag{13}$$

причем, если $R^* < R^k$, то $R^{k+1} < R^k$.

Шаг 3. Если обнаружится, что $R^{k+1} = R^k$, то задача решена.

Для реализации приведенной алгоритмической схемы предлагается метод минимальных вариаций условно-оптимальных иерархий $R^*(Z_1)$, оптимизирующих функционал (4) при фиксированном слое Z_1. Рассмотрим основные свойства множества $I^L(G)$, используемые в данном методе. Прежде всего, можно показать, что для того чтобы R^* оставалась «не выше» условно-оптимальной иерархии: $R^* \le R^*(Z_1)$, необходимо и достаточно, чтобы $Z_1 \subseteq Z_1^*$. Это позволяет строить вариации для наращевания слоя Z_1, оставаясь «не выше» оптимальных иерархий. Действительно, среди множества $V(Z_1)$ допустимых вариаций слоя Z_1 иерархии $R^*(Z_1)$, т.е. таких $X \in V(Z_1)$, что $R^* \le R^*(Z_1 \cup X) \le R^*(Z_1)$, будем выбирать вариацию X', для которой функционал (4) возрастает:

$$\Phi\left(R(Z_1 \cup X')\right) > \Phi\left(R^*(Z_1)\right), \tag{14}$$

причем не на одном подмножестве X' соотношение (16) не выполняется (в этом смысле вариация X' называется минимальной).

После построения уровней взаимодействия необходимо решить задачу разделения их на сферы деятельности, соответствующие целям C_α. Сфера деятельности элемента определяется решением задач управления, связанных со всеми подцелями $C_\beta \subseteq C_\alpha$. Относительную загруженность элемента ξ решением задач сферы деятельности C_α будем обозначать:

$$p^\alpha(\zeta) = \sum_{c_\beta \subseteq c_\alpha} \sum_{j=1}^{\mu_\beta} p_i^\beta(\xi). \tag{15}$$

Метод распадается на последовательное решение $\sum_{\lambda=2}^{L} n_{\lambda-1}$ задач, каждая из которых эквивалентна следующей. Пусть на вершинах графа $G(Z,W)$ задана векторная функция $P(\xi) = \left(p^1(\xi), p^2(\xi), ..., p^n(\xi)\right)$, необходимо найти разбиение $Q = (Z^1, ..., Z^n)$ множества вершин графа G на не связанные между собой дуги $w \in W$ подмножества $Z^i, i = 1, ..., n$, максимизирующие функционал

$$\Phi^P(Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\zeta \in Z^i} p^i(\xi). \tag{16}$$

В целом после решения приведенных задач анализа структуры можно оценить соответствие сложившейся структуры управления нормативным целям системы. Для этого достаточно сравнить полученное в результате решения значение функции (4) со значением этой функции, получающимся при классификации элементов системы Z в соответствии с деревом цели, но без учета их реального взаимодействия, задаваемого графом G. Если имеет место явное несоответствие, то возникает задача изменения взаимодействия между элементами системы. В случае если и это не решает проблему, то следует менять вид деятельности элементов системы.

Наиболее важны способы построения иерархий, при которых устанавливается взаимосвязь структуры управления с деревом целей системы.

Построение и анализ дерева целей крупных ИИС позволяет сделать вывод о том, что разбиение ИИС на систему управления и объект управления зависит от уровня, который интересует исследователя. Будем считать, что в разделение на управляющий орган и объект управления четко представлено и соответствует дереву целей. Введем обозначения: ξ^α — состояние системы S_α; u^α — управляющее воздействия системы S_α на элементы более низкого уровня $S_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, ..., \xi_\alpha$; ω^α — интегрированная информация, определяемая целью C_α, передаваемая из S_α в $S_{\neg\alpha}$ (при $|\alpha| \ge 2$), $\neg\omega = \left(\omega^{\alpha,1}, ..., \omega^{\alpha,\gamma_\alpha}\right)$ — информация о сферах деятельности $C_{\alpha,i}, i = 1, ..., \gamma_\alpha$.

Система S_1 управляет деятельностью всей ИИС. Системы нижнего уровня S_α, где $|\alpha| = L$, управляют непосредственно объектами системы, реализуя выделенные для нее функции. Вообще управление объектом осуществляется некоторой системой S_α, где $|\alpha| \in \{1, ..., L\}$, посредством принятия решений, которые, в свою очередь, являются результатами решения задач из семейства $\{D^{\alpha_j}\}$, $j = 1, ..., \mu_\alpha$, связанных с целью C_α.

Список литературы

1. *Тен Т.Л.* Методы анализа информационно-измерительных систем // Вестн. ПГУ. Сер. физ.-мат. — Павлодар: ПГУ им. С.Торайгырова, 2005. — № 4. — С. 83–86.