НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Балкизов Ж.А.

Институт прикладной математики и автоматизации, г. Нальчик, Россия

E-mail: Giraslan@yandex.ru

В прямоугольной области $D=\{(x,y):\ 0<x<r,\ 0<y<h\}$ евклидовой плоскости точек $z=(x,y)$ рассмотрим уравнение

$$Lu=u_{xxx}(z)+a_2(z)u_{xx}(z)+a_1(z)u_x(z)+b_2(z)u_{yy}(z)+b_1(z)u_y(z)+b_0(z)u=-f(z), \qquad (1)$$

где $a_i(z)=a_i(x,y)\ (i=1,2)$, $b_j(z)=b_j(x,y)\ (j=0,1,2)$, $f(z)=f(x,y)$ – заданные функции из класса $a_i(z)\in C_x^i(\overline{D})$, $b_j(z)\in C_y^j(\overline{D})$, $f(z)\in C(\overline{D})$, а $u(z)=u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1), которое в монографии [1, с. 132] названо уравнением третьего порядка с кратными характеристиками относится к уравнению параболического типа [2, с. 72]. Как показано в работе [3] линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (1) при $b_2(z)\equiv 0$. В работах [4] - [7] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда коэффициент $b_2(z)\equiv 0$.

В работах [8] – [10] различными методами получены фундаментальные решения модельного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками вида

$$u_{xxx}(z)-u_{yy}(z)=0, \qquad (2)$$

а также изучены свойства полученных решений и, в частности, получены оценки построенных фундаментальных решений и их производных. Краевые задачи для уравнений вида (2) и (1) при $b_2(x,y)\neq 0$ как в ограниченной, так и в неограниченной областях изучены в работах [11] – [15].

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u(z)=u(x,y)$ из класса $C(\overline{D})\cap C_{x,y}^{3,2}(D)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В данной работе исследуется следующая

Задача А. Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса $u(x,y)\in C_x^2(D\cup\{x=r\})\cap C_y^1(D\cup\{y=0\}\cup\{y=h\})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=0,\quad u_x(0,y)=0,\quad u_{xx}(r,y)-\alpha u(r,y)=0,\quad 0<y<h,$$
$$u(x,0)=u(x,h),\quad u_y(x,0)=u_y(x,h),\qquad 0<x<r,$$

где $\alpha=const$ - заданное число.

Обозначим $(u,\upsilon)_0=\int\limits_D u(z)\upsilon(z)dx\,dy$, $\|u\|_0^2=(u,u)_0=\int\limits_D u^2(z)dx\,dy$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $a_i(x,y)\ (i=1,2)$, $b_j(x,y)\ (j=0,1,2)$, α таковы, что они обладают свойствами:*

$$a_2(z)\geq 0,\ b_2(z)\geq 0,\ a_{2xx}(z)+b_{2yy}(z)-a_{1x}(z)-b_{1y}(z)+2b_0(z)<0\quad \forall\ (x,y)\in D,$$
$$a_{2x}(r,y)-a_1(r,y)-2\alpha\geq a_2^2(r,y)\quad \forall\ y\in[0,h],$$
$$b_2(x,h)=b_2(x,0),\ b_{2y}(x,h)-b_{2y}(x,0)\geq b_1(x,h)-b_1(x,0)\quad \forall\ x\in[0,r].$$

Тогда для решения $u(z)=u(x,y)$ задачи А имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(z)\|_0\leq C\|f(z)\|_0, \qquad (3)$$

где C – положительная постоянная, не зависящая от искомой функции $u(z)$.

Из априорной оценки (3) вытекает единственность регулярного решения исследуемой задачи А.

Список использованных источников

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 238 с.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
3. *Красильников В.А., Кузнецов В.П.* Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журнал. 1974. Т.20, №3. С. 473 – 477.
4. *Cattabriga L.* Annali della seuola normole Superici di pisa e mat., 1959, vol. 13, № 2, p. 163.
5. *Иргашев Ю.* Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Сборник научных трудов "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". Ташкент: ФАН. 1976. С. 17-31.

6. *Джураев Т. Д, Абдиназаров С.* Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН Узбекской ССР. 1981. №1. С. 8-11.

7. *Абдиназаров С.* Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №1. С. 3-12.

8. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivies partielles a caracteristiques mulptiples // Arkiv for Mat. Astr. och Fysik. 1912. Bd.7. P. 3–20.

9. *Cattabriga L.* Potenziale di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padava. 1961. Vol. 31.

10. *Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2007. №2(16). С. 18-26.

11. *Иргашев Ю., Апаков Ю.П.* Первая краевая для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Узбекский математический журнал. 2006. №2. С. 44-51.

12. *Апаков Ю.П.* К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Доклады АН республики Узбекистан. 2006. №3. С. 17-20.

13. *Апаков Ю.П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. Т.64, №1. 2012. С. 3-13.

14. *Балкизов Ж.А., Кодзоков А.Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2010. №4. С. 64-69.

15. *Балкизов Ж.А.* Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, №3. С. 13 – 21.

ОБ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОЛОННИКОВА - ФАЗАНО

Дженалиев М.Т.[1], Рамазанов М.И.[2,3]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан*

E-mail: muvasharkhan@gmail.com

[2]*Институт прикладной математики КН МОН РК,*

[3]*КарГУ им. Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан*

E-mail: ramamur@mail.ru

Рассматривается однородная граничная задача теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ 0 < x < mt,\ t \in (0,T)\ , \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0+} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=mt} + k\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t) = u(x,t)\big|_{x=mt} = u(mt,t)$, k и m - заданы.

Задача (1)-(2) является однородным случаем задачи, исследованной в [1], где указано, что данная задача оказывается полезной при изучении задач со свободными границами.

Введя новую функцию $v(x,t) = \partial u(x,t) / \partial x,$ и используя тепловые потенциалы простого слоя [2], задачу (1)-(2) сведем к решению сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода

$$\varphi(t) - \frac{m}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} \cdot \varphi(\tau)d\tau - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} \cdot \varphi(\tau)d\tau +$$

$$+\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} - \frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{3}$$

Выделяя характеристическую часть данного однородного интегрального уравнения, решение которой определяется в явном виде и используя метод регуляризации Карлемана-Векуа найдем его ненулевое решение [3]. Тем самым, показано, что поставленная однородная краевая задача также имеет ненулевое решение. Доказана справедливость теоремы.