B.H.Turmetov, N.Z.Bayimetova

On solvability of some boundary value problem with the Hadamard-Marshaud operator

In this work we investigate the properties of some integro-differential Hadamard-Marshaud operators in the class of harmonic functions. As an application of the obtained results we consider solvability of one boundary value problem for the Laplace equation on the unit ball.

УДК 517.95

Б.Х.Турметов, А.У.Куанишбаева

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, г.Туркестан (E-mail: aknur_19_87@mail.ru)

Об одном методе решения дифференциальных уравнений дробного порядка

В статье рассмотрен новый метод решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Этот метод является обобщением метода, основанного на методе операторного алгоритма. Также введены и исследованы новые типы специальных функций.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, оператор интегрирования Римана-Лиувилля, дифференцирование в смысле Капуто.

Введение. Пусть $X = X(\Omega)$ — некоторое линейное пространство функций, определенных в области $\Omega \subset R^n$, и L_1, L_2 — линейные операторы, заданные в пространстве $X = X(\Omega)$. Приведем следующее определение [1].

Определение 1. Бесконечную систему функций $f_k(t) \in \mathrm{X}, k = 0,1,2,...,$ любая конечная подсистема которой линейно независима, назовём *f*-нормированной относительно оператора L_1 в области Ω, если всюду в этой области выполняются равенства $L_1 f_k(t) = f_{k-1}(t), k \geq 1$, и $L_1 f_0(t) = f(t)$.

Если $f_0(t) = 0$, то система $f_k(t) \in \mathrm{X}, k = 0,1,2,...$, называется 0-нормированной или просто нормированной [2]. Основным свойством нормированных систем является следующее: если $\{f_k(t)\}$ — система функций, *f*-нормированная относительно L_1 в области Ω таких, что ряд $y(t) = \sum_{a=0}^{\infty} f_a(t)$ сходится и допускает почленное применение операторов L_1 и L_2, то функция $y(t)$ в области Ω будет решением уравнения

$$(L_1 - L_2)\, y(t) = f(t). \tag{1}$$

Приведем необходимые определения операторов интегро-дифференцирования дробного порядка, с которыми в дальнейшем будем работать.

Пусть $0 < \alpha$ — действительное число. Выражение

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad t > 0,$$

называется оператором интегрирования α-го порядка в смысле Римана-Лиувилля [3].

Пусть далее $m-1 < \alpha \leq m, m = 1,2,...$. Рассмотрим оператор

$$D_*^{\alpha} f(t) = I^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$

Данный оператор называется оператором дробного дифференцирования α-го порядка в смысле Капуто [3].

Пусть заданы действительные числа α_j, удовлетворяющие условиям $0<\alpha_1\le\alpha_2\le...\le\alpha_m\le 1$, $m=1,2,...$, и пусть $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$. Введем оператор

$$D^\alpha f(t)=D_*^{\alpha_m}\left[D_*^{\alpha_{m-1}}...\left[D_*^{\alpha_1}[f]\right]...\right](t).$$

Так как $I^0 f(t)=f(t)$, то в случае $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=1$ получаем $D^\alpha=d^m/dt^m$. Отметим, что для любых $\alpha,\beta>0$ $D^{\alpha+\beta}\ne D^\alpha D^\beta$, и поэтому в общем случае $D^\alpha f(t)\ne D_*^\alpha f(t)\equiv D_*^{\alpha_m+\alpha_{m-1}+...+\alpha_1} f(t)$.

Основным объектом нашего исследования является построение решения уравнения вида

$$\left(D^\alpha+\lambda\right)^N y(t)=f(t), \tag{2}$$

где λ — действительное число, $N=1,2,...$.

Отметим, что исследуемый метод построения решения дифференциальных уравнений вида (2) в случае дифференциальных операторов целого порядка при $f(t)=0$ рассмотрен в работе [2].

Свойства оператора D^α

Изучим некоторые свойства оператора D^α.

Лемма 1. Пусть $0<\gamma\le 1$ и $f(t)=t^\mu, \mu\ge 0$. Тогда

$$D_*^\gamma f(t)=\begin{cases}0, \ \mu=0\\ \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\gamma)}t^{\mu-\gamma}, \mu>0.\end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что $D^\gamma t^0=0$. Пусть $\mu>0$. Тогда по определению оператора D_*^γ получаем

$$D_*^\gamma f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\frac{d}{d\tau}\tau^\mu d\tau=\frac{\mu}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\tau^{\mu-1}d\tau=$$

$$\frac{\mu}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^1 (1-\xi)^{-\gamma}\xi^{\mu-1}d\xi\cdot t^{\mu-\gamma}=\frac{\mu}{\Gamma(1-\gamma)}\cdot\frac{\Gamma(1-\gamma)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1-\gamma)}t^{\mu-\gamma}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\gamma)}t^{\mu-\gamma}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $0<\alpha_j\le 1,\ j=1,2,...,m,\ \alpha_i\le\alpha_j, i<j,\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ и $f(t)=t^{k\alpha+s}$, $k=0,1,...,\ s=0,\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,...,\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{m-1}$. Тогда

$$D^\alpha f(t)=\begin{cases}0, k=0\\ \dfrac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha)}t^{k\alpha+s-\alpha}, k\ge 1.\end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $k=0$ и s принимает одно из значений $s_0=0, s_1=\alpha_1$, $s_2=\alpha_1+\alpha_2,...,s_{m-1}=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{m-1}$. Тогда в силу формулы (3) получаем

$$D_*^{\alpha_1}t^0=0,\ D_*^{\alpha_1}t^{\alpha_1}=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(1)}t^0,\ D_*^{\alpha_1}t^{\alpha_1+...+\alpha_{m-1}}=\frac{\Gamma(\alpha_1+...+\alpha_{m-1}+1)}{\Gamma(\alpha_2+...+\alpha_{m-1}+1)}t^{\alpha_2+...+\alpha_{m-1}}.$$

Далее, последовательно применяя операторы $D^{\alpha_1}, D^{\alpha_2},...$ к функции t^{s_i}, имеем:

$$D_*^{\alpha_j}\cdot D_*^{\alpha_{j-1}}\cdot...\cdot D_*^{\alpha_1}t^{s_i}=\begin{cases}0, \text{если } i<j\\ C(\alpha_1,...,\alpha_j)t^0, \text{если } i=j.\end{cases} \tag{5}$$

Значит, для любого $s_i, i=0,1,...,m-1$, имеем $D^\alpha t^{s_i}=0, i\le m-1$.

Пусть теперь $k\ge 1$ и s принимает значение $s_j=\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i$ и $s_0=0$. Тогда, последовательно применяя операторы $D^{\alpha_1}, D^{\alpha_2},...,D^{\alpha_m}$ к функции $f(t)=t^{k\alpha+s_j}$, с учетом формулы (3) получаем:

$$D_*^{\alpha_m}\cdot D_*^{\alpha_{m-1}}\cdot\ldots\cdot D_*^{\alpha_1}f(t)=\frac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha_1)}\cdot\frac{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha_1)}{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{m-1})}{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_m)}t^{k\alpha+s-\alpha}.$$

Следовательно, $D^\alpha f(t)=\dfrac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma(k\alpha+s+1-\alpha)}t^{k\alpha+s-\alpha}$, $k\geq 1$. Лемма доказана.

Построение нормированных систем для однородного уравнения

Пусть $k=1,2,\ldots$ и s принимает одно из значений $s_0=0, s_j=\sum\limits_{i=1}^{j-1}\alpha_i$. Тогда из формулы (4) следует $D^\alpha t^{k\alpha+s}=\dfrac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma((k-1)\alpha+s+1)}t^{k\alpha+s-\alpha}$.

Умножая последнее равенство с двух сторон на одночлен $t^{-k\alpha-s+\alpha}$, получаем:

$$\left(t^{-k\alpha-s+\alpha}D^\alpha t^{k\alpha+s}\right)=\frac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma((k-1)\alpha+s+1)}. \tag{6}$$

Обозначим

$$C(\alpha,s,0)=1,\ C(\alpha,s,i)=\prod_{k=1}^{i}\left(t^{-k\alpha-s+\alpha}D^\alpha t^{k\alpha+s}\right),\ i=1,2,\ldots$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 3. Для коэффициентов $C(\alpha,s,i)$ справедливы равенства

$$\frac{\left(t^{-\alpha i-s}D^\alpha t^{\alpha i+s+\alpha}\right)}{C(\alpha,s,i+1)}=\frac{1}{C(\alpha,s,i)}; \tag{7}$$

$$C(\alpha,s,i)=\frac{\Gamma(i\alpha+s+1)}{\Gamma(s+1)}. \tag{8}$$

Доказательство. Докажем равенство (7). По определению коэффициентов $C(\alpha,s,i)$ имеем

$$C(\alpha,s,i+1)=\prod_{k=1}^{i+1}\left(t^{-k\alpha-s+\alpha}D^\alpha t^{k\alpha+s}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{i}\left(t^{-k\alpha-s+\alpha}D^\alpha t^{k\alpha+s}\right)\cdot\left(t^{-i\alpha-s}D^\alpha t^{i\alpha+s+\alpha}\right)=C(\alpha,s,i)\left(t^{-i\alpha-s}D^\alpha t^{i\alpha+s+\alpha}\right).$$

Отсюда получаем равенство (7).

Далее, в силу равенства (6) коэффициенты $C(\alpha,s,i)$ можно представить в виде

$$C(\alpha,s,i)=\prod_{k=1}^{i}\frac{\Gamma(k\alpha+s+1)}{\Gamma((k-1)\alpha+s+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+s+1)}{\Gamma(s+1)}\cdot\frac{\Gamma(2\alpha+s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma(i\alpha+s+1)}{\Gamma((i-1)\alpha+s+1)}=\frac{\Gamma(i\alpha+s+1)}{\Gamma(s+1)}.$$

Равенство (8) и, следовательно, лемма доказаны.

Лемма 4. Пусть $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j$, s принимает одно из значений $s_0=0, s_j=\sum\limits_{k=1}^{j-1}\alpha_k$, $j=1,2,\ldots,m-1$. Тогда система функций

$$f_i(t)=\frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)}, i=0,1,\ldots \tag{9}$$

при каждом значении $s=s_j$ образует 0-нормированную систему относительно оператора D^α.

Доказательство. Пусть $i=1,2,\ldots$ и s принимает одно из значений s_j, $j=0,1,\ldots,m-1$. Тогда в силу утверждения леммы 3 для $f_i(t)$ имеем

$$D^{\alpha} f_i(t)= D^{\alpha}\frac{t^{i\alpha+s}}{C(\alpha,s,i)}=\frac{\Gamma(i\alpha+s)}{\Gamma(\alpha i+s+1-\alpha)}t^{\alpha i+s-\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha i+s)}{\Gamma((i-1)\alpha+s+1)}t^{\alpha(i-1)+s}=f_{i-1}(t),\ i=1,2,\dots,$$

и

$$D^{\alpha} f_0(t)= D^{\alpha}\frac{t^{s}}{c(\alpha,s,0)}=0.$$

Следовательно, система (9) образует 0-нормированную систему относительно оператора D^{α}.

Рассмотрим функцию

$$\Phi^{p}_{\alpha,s}(\lambda,t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)}, \tag{10}$$

где $\lambda\in R,\ \ p=0,1,...,\ \binom{i}{p}=\dfrac{i!}{p!(i-p)!}.$

Сначала изучим свойства функции $\Phi^{p}_{\alpha,s}(t)$ в случае $p=0$.

Теорема 1. Пусть $\alpha=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j,\ 0<\alpha\le 1,\ j=1,2,...,m$ и s принимает одно из значений $s_0=0$, $s_j=\sum_{i=1}^{j}\alpha_i,\ j=1,2,...,m-1.$ Тогда $\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t), D^{\alpha}\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)=C[0,\infty)$ и удовлетворяет равенству

$$D^{\alpha}[\Phi^{0}_{\alpha,s}](\lambda,t)-\lambda\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)=0. \tag{11}$$

Доказательство. Так как $\alpha i+s\ge 0,$ то очевидно, что функции $t^{\alpha i+s}$ являются непрерывными в $[0,\infty).$ Далее, из представления (8) и асимптотической оценки для гамма-функции Эйлера [3]

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi z}e^{-z}z^{z}, z\to\infty$$

легко следует равномерная сходимость ряда (10) при $p=0$ в любом отрезке $[0,T].$ Следовательно, $\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)\in C[0,\infty).$

Аналогично можно показать, что $D^{\alpha}\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)\in C[0,\infty).$

Далее, применяя к функции $\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)$ оператор D^{α} с учетом 0-нормируемости системы $\dfrac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)},$ получаем:

$$D^{\alpha}\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)=\sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^{i}\frac{t^{\alpha i+s-\alpha}}{C(\alpha,s,i-1)}.$$

Меняя в последнем выражении индекс суммирования i на $i+1,$ имеем:

$$D^{\alpha}\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)=\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^{i+1}\frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)}=-\lambda\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t).$$

Отсюда следует равенство (11). Теорема доказана.

Следствие 1. Для всех значений $s=0,\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,...,\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{m-1}$ функции $\Phi^{0}_{\alpha,s_j}(\lambda,t)$ являются решениями уравнения

$$\left(D^{\alpha}+\lambda\right)\ y(t)=f(t), t>0.$$

Таким образом, система функций

$$\Phi^{0}_{\alpha,s_1}(\lambda,t),\Phi^{0}_{\alpha,s_2}(\lambda,t),...,\Phi^{0}_{\alpha,s_{m-1}}(\lambda,t)$$

удовлетворяет уравнению (2), когда $f(t)=0$ и $N=1$.

Используя равенство (8), мы можем преобразовать функцию $\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)$ к следуюшему виду:

$$\Phi^{0}_{\alpha,s}(\lambda,t)=\Gamma(s+1)t^{s}\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^{i}\frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(i\alpha+s+1)}=\Gamma(s+1)t^{s}E_{\alpha,s+1}(-\lambda t^{\alpha}),$$

где

$$E_{\alpha,\rho}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(i\alpha+\rho)},\alpha>0,\rho>0$$

— функция типа Миттаг-Леффлера [3].

Теорема 2. Функция

$$y(t)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{\Gamma(s_j+1)}\Phi^0_{\alpha,s_j}(\lambda,t) \tag{12}$$

является решением следующей специальной задачи Коши:

$$\begin{cases}\left(D^\alpha+\lambda\right)y(t)=0,\ t>0\\ D^{s_j}y(t)\big|_{t=0}=a_j,\ \ j=0,1,...,m-1,\end{cases} \tag{13}$$

где $s_j=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k$, а $D^{s_j}=D_*^{\alpha_j}\cdot D_*^{\alpha_{j-1}}\cdot...\cdot D_*^{\alpha_1}$ при $j\geq 1$ и $D^{s_0}y(t)=D_*^0y(t)\equiv y(t)$.

Доказательство. Так как $s_0=0, s_j>0,\ j=1,2,...,$ то очевидно

$$\Phi^0_{\alpha,s}(\lambda,t)\big|_{t=0}=\begin{cases}0,\ j=1,2,...,m-1\\ 1,\ j=0\end{cases}$$

и, следовательно, $y(0)=a_1$.

Далее, для любого $j\in[1,m-1]$ в силу равенства (5) легко следует

$$D^{s_j}t^{\alpha i+s_k}=\begin{cases}0,\ \text{если } i=0,\ k<j\\ \dfrac{\Gamma(\alpha i+s_k+1)}{\Gamma(\alpha i+s_k+1-s_j)}t^{\alpha i+s_k-s_j},\text{если } i\geq 0,\ \ k\geq j.\end{cases}$$

Причем если $k=j$ и $i=0,$ то $D^{s_j}t^{s_j}=\Gamma\left(s_j+1\right)t^0=\Gamma\left(s_j+1\right)$. Тогда

$$D^{s_j}\Phi^0_{\alpha,s_k}(\lambda,t)\big|_{t=0}=\begin{cases}0,\ j\neq k,\\ \Gamma(s_j+1),\ j=k.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что функция (12) удовлетворяет начальным условиям задачи (13). Теорема доказана.

Теперь переходим к изучению свойств функции $\Phi^p_{\alpha,s}(\lambda,t)$ в общем случае.

Теорема 3. Пусть $0<\alpha\leq 1,\ j=1,2,...,m,\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ и параметр s принимает значения $s_0=0, s_1=\alpha_1, s_2=\alpha_1+\alpha_2,...,s_{m-1}=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{m-1}$. Тогда функции $\Phi^p_{\alpha,s}(\lambda,t),\ p=0,1,...,$ принадлежат пространству $C[0,\infty)$ и образуют 0-нормированную систему относительно оператора $D^\alpha+\lambda,$ т.е. удовлетворяют следующим равенствам:

$$\left(D^\alpha+\lambda\right)\Phi^0_{\alpha,s}\left(\lambda,t\right)=0, \tag{14}$$

$$\left(D^\alpha+\lambda\right)\Phi^p_{\alpha,s}\left(\lambda,t\right)=\Phi^{p-1}_{\alpha,s}(\lambda,t),\ \ p\geq 1. \tag{15}$$

Доказательство. Равенство (14) доказано в следствии 1. Пусть $p\geq 1$. Применяя к функции $\Phi^p_{\alpha,s}\left(\lambda,t\right)$ оператор $D^\alpha,$ имеем:

$$D^\alpha\Phi^p_{\alpha,s}(\lambda,t)=\sum_{i=p}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{i-p}\binom{i}{p}\frac{D^\alpha t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)}=\sum_{i=p}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{i-p}\binom{i}{p}\frac{\left(t^{-\alpha i-s+\alpha}\ D^\alpha t^{\alpha i+s}\ \right)}{C(\alpha,s,i)}t^{\alpha i+s-\alpha}.$$

Меняя в последней сумме индекс суммирования i на $i+1$ и используя равенство (7), получаем:

$$D^\alpha\Phi^p_{\alpha,s}(\lambda,t)=\sum_{i=p-1}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{i+1-p}\binom{i+1}{p}\frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)}.$$

Далее, используя соотношения $\begin{pmatrix} i+1 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = 0,$ для функции $D^{\alpha}\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) - \Phi_{\alpha,s}^{p-1}(\lambda,t)$ имеем:

$$D^{\alpha}\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) - \Phi_{\alpha,s}^{p-1}(\lambda,t) = \sum_{i=p-1}^{\infty} \left(-\lambda\right)^{i-(p-1)} \left[\begin{pmatrix} i+1 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ p-1 \end{pmatrix} \right] \frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)} =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \left(-\lambda\right)^{i-(p-1)} \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix} \frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)} = -\lambda \sum_{i=p}^{\infty} \left(-\lambda\right)^{i-p} \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix} \frac{t^{\alpha i+s}}{C(\alpha,s,i)} = -\lambda \Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t).$$

Значит,

$$D^{\alpha}\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) - \Phi_{\alpha,s}^{p-1}(\lambda,t) = -\lambda\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t).$$

Следовательно,

$$D^{\alpha}\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) + \lambda\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) = \Phi_{\alpha,s}^{p-1}(\lambda,t).$$

Как в случае $p=0,$ легко показать, что $\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t) \in C\left[0,\infty\right).$ Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $p = 0,1,2,..., N-1.$ Тогда для любого $s = 0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, ..., \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{m-1}$ функции $\Phi_{\alpha,s}^{p}(\lambda,t)$ удовлетворяют уравнению (2) при $f\left(t\right) = 0.$

Построение нормированных систем лля неоднородного уравнения

Пусть $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m,\ 0 < \alpha_j \le 1,\ j = 1,2,...,m.$ Рассмотрим функцию

$$f_p\left(t\right) = \int_0^t \left(t-\xi\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^{p}\left(-\lambda, \left(t-\xi\right)^{\alpha}\right) f\left(\xi\right) d\xi, \tag{16}$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{p}\left(-\lambda, z\right) = \sum_{i=p}^{\infty} \left(-\lambda\right)^{i-p} \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix} \frac{z^i}{\Gamma\left(\alpha i + \beta\right)},\ \alpha,\beta > 0,\ p = 0,1,...$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Система функции $f_p\left(t\right),\ p = 0,1,...,$ образует *f*-нормированную систему относительно оператора $D^{\alpha} + \lambda,$ т.е. справедливы следующие равенства:

$$\left(D^{\alpha} + \lambda\right) f_0\left(t\right) = f\left(t\right), t > 0, \tag{17}$$

$$\left(D^{\alpha} + \lambda\right) f_p\left(t\right) = f_{p-1}\left(t\right),\ p = 1,2,... \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $p=0.$ Рассмотрим действие оператора $D_*^{\alpha_1}$ на функцию $f_0\left(t\right).$ По определению оператора $D_*^{\alpha_1}$ имеем

$$D_*^{\alpha_1} f_0\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)} \int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\alpha_1} \frac{d}{d\tau} f_0\left(\tau\right) d\tau \equiv I$$

Последний интеграл можно представить в виде

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\left(t-\tau\right)^{-\alpha_1}}{1-\alpha_1} \frac{d}{d\tau} f_0\left(\tau\right) d\tau.$$

Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\left(t-\tau\right)^{-\alpha_1}}{1-\alpha_1} f_0\left(\tau\right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\alpha_1} \frac{d}{d\tau} f_0\left(\tau\right) d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\alpha_1} \int_0^{\tau} \left(\tau-\xi\right)^{\alpha-1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\lambda\right)^i \frac{\left(\tau-\xi\right)^{\alpha i}}{\Gamma\left(\alpha i + \alpha\right)} \right] f\left(\xi\right) d\xi d\tau \right\} =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha_1}\int_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}f(\xi)\,d\xi d\tau\right\}.$$

Рассмотрим повторный интеграл:

$$\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha_1}\int_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}f(\xi)\,d\xi d\tau=\int_0^t f(\xi)\int_{\xi}^t(t-\tau)^{-\alpha_1}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}\,d\tau d\xi.$$

После замены переменных $\tau=(t-\xi)z+\xi$ для внутреннего интеграла получаем

$$\int_{\xi}^t(t-\tau)^{-\alpha_1}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}\,d\tau=\int_0^1(1-z)^{-\alpha_1}z^{\alpha i+\alpha-1}dz\cdot(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1}=\frac{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(\alpha i+\alpha)}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\alpha_1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1}.$$

Тогда

$$I=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\xi)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^i\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\alpha_1)}\right]d\xi\right\}=\int_0^t f(\xi)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^i\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha-\alpha_1)}\right]d\xi.$$

Следовательно,

$$D_*^{\alpha_1}f_0(t)=\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-\alpha_1-1}E^0_{\alpha,\alpha-\alpha_1}\left(-\lambda,(t-\xi)^{\alpha}\right)d\xi.$$

Если повторим эту процедуру для оператора $D_*^{\alpha_2}\cdot D_*^{\alpha_1}$, то получим

$$D_*^{\alpha_2}D_*^{\alpha_1}f_0(t)=\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2-1}E^0_{\alpha,\alpha-\alpha_1-\alpha_2}\left(-\lambda,(t-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)\,d\xi.$$

Далее, применяя метод математической индукции по j, $j=1,2,...,m-1$, легко показать, что справедливо равенство

$$D_*^{\alpha_{m-1}}D_*^{\alpha_{m-2}}\cdots D_*^{\alpha_1}f_0(t)=\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{m-1}-1}E^0_{\alpha,\alpha-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{m-1}}\left(-\lambda,(t-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)\,d\xi. \qquad (19)$$

Применим к равенству (19) оператор $D_*^{\alpha_m}$. Тогда, считая, что $s_j=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k$, $j=1,2,...,m,$ имеем:

$$D^{\alpha_m}f_0(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m)}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t\frac{(t-\tau)^{1-\alpha_m}}{1-\alpha_m}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\alpha-s_{m-1}-1}E^0_{\alpha,\alpha-s_{m-1}}\left(-\lambda,(\tau-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)\,d\xi\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m)}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\xi)\int_{\xi}^t(t-\tau)^{-\alpha_m}(\tau-\xi)^{\alpha-s_{m-1}-1}E^0_{\alpha,\alpha-s_{m-1}}\left(-\lambda,(t-\xi)^{\alpha}\right)d\tau d\xi\right\}.$$

Исследуем в последнем выражении внутренний интеграл

$$\int_{\xi}^t(t-\tau)^{-\alpha_m}(\tau-\xi)^{\alpha-s_{m-1}-1}E^0_{\alpha,\alpha-s_{m-1}}\left(-\lambda,(\tau-\xi)^{\alpha}\right)d\tau=$$

$$=\Gamma(1-\alpha_m)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha-s_m+1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-s_m}=\Gamma(1-\alpha_m)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{\Gamma(\alpha i+1)}(t-\xi)^{\alpha i}.$$

Итак,

$$D_*^{\alpha}f_0(t)=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\xi)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^i\frac{(t-\xi)^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+1)}\right]d\xi\right\}.$$

Значит,

$$D_*^{\alpha}f_0(t)=f(t)+\int_0^t f(\xi)\left[\sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^i\frac{\alpha i(t-\xi)^{\alpha i-1}}{\Gamma(\alpha i+1)}\right]d\xi=$$

$$=f(t)-\lambda\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-1}E^0_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda,(t-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)d\xi=f(t)-\lambda f_0(t).$$

Таким образом, справедливо равенство $D^{\alpha} f_0(t) = f(t) - \lambda f_0(t)$. Равенство (17) доказано.

Переходим к доказательству равенства (18). Пусть $p \geq 1$. Применим к функции $f_p(t)$ оператор $D_*^{\alpha_1}$. По определению

$$D_*^{\alpha_1} f_p(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_1} \frac{d}{d\tau} f_p(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} \frac{d}{d\tau} f_p(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_1} f_p(\tau) d\tau \right\}.$$

Далее, используя представление функции $f_p(\tau)$, имеем:

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_1} f_p(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_1} \int_0^{\tau} (\tau-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p \left(-\lambda, (t-\xi)^{\alpha}\right) f(\xi) d\xi d\tau =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{i-p}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)} \binom{i}{p} \left[\int_0^t f(\xi) \int_0^1 (1-z)^{-\alpha_1} z^{\alpha i+\alpha-1} dz \cdot (t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1} d\xi \right] =$$

$$= \Gamma(1-\alpha_1) \sum_{i=p}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{i-p}}{\Gamma(\alpha i+\alpha-\alpha_1+1)} \binom{i}{p} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1} f(\xi) d\xi.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1} f(\xi) d\xi = (\alpha i+\alpha-\alpha_1) \int_0^t (t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\alpha_1-1} f(\xi) d\xi,$$

то для $D_*^{\alpha_1} f_p(t)$ получаем

$$D_*^{\alpha_1} f_p(t) = \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-\alpha_1-1} E_{\alpha,\alpha-\alpha_1}^0 \left(-\lambda, (t-\xi)^{\alpha}\right) f(\xi) d\xi.$$

Тогда, повторяя рассуждения, применяемые при доказательстве равенства (17), в общем случае получаем:

$$D^{\alpha} f_p(t) = \int_0^t \left[\sum_{i=p}^{\infty} (-\lambda)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i-1}}{\Gamma(\alpha i)} \right] f(\xi) d\xi = \int_0^t \left[\sum_{i=p-1}^{\infty} (-\lambda)^{i+1-p} \binom{i+1}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)} \right] f(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим функцию $D^{\alpha} f_p(t) - f_{p-1}(t)$. По определению функции $f_{p-1}(t)$ имеем

$$D^{\alpha} f_p(t) - f_{p-1}(t) = \int_0^t \left[\sum_{i=p-1}^{\infty} (-\lambda)^{i+1-p} \left[\binom{i+1}{p} - \binom{i}{p} \right] \frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)} \right] f(\xi) d\xi =$$

$$= \int_0^t \left[\sum_{i=p}^{\infty} (-\lambda)^{i+(p-1)} \binom{i}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)} \right] f(\xi) d\xi = -\lambda \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p \left(-\lambda, (t-\xi)^{\alpha}\right) f(\xi) d\xi = -\lambda f_p(t).$$

Следовательно,

$$D^{\alpha} f_p(t) - f_{p-1}(t) = -\lambda f_p(t)$$

или

$$D^{\alpha} f_p(t) + \lambda f_p(t) = f_{p-1}(t),$$

т.е. справедливо равенство (18). Теорема доказана.

Следствие. Для любого $N = 1, 2, \ldots$ функция $f_{N-1}(t)$ является частным решением уравнения (2).

References

1 *Karachik V.V.* Polyniomal solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients // Yokohama mathematical Journal. — 2000/47(2). — P. 121–142.

2 *Bondarenko B.A.* Operator algorithms in differential equations. — Tashkent: FAN Publishers, 1984. — 184 p.

3 *Pskhu A.V.* Equations in partial derivatives of fractional order. — Moscow: Science, 2005. — 199 p.

Б.Х.Тұрметов, А.У.Қуанышбаева

Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешудің бір әдісі туралы

Мақалада бөлшек ретті дифференциалдық теңдеуді құрудың жаңа әдісі қарастырылды. Бұл әдіс операторлық алгоритм әдісіне негізделген әдістің жалпыламасы болады. Сонымен қатар арнайы функциялардың жаңа түрлері енгізіліп, зерттелді.

B.H.Turmetov, A.U.Kuanyshbaeva

About one of the methods of solving differential equations of fractional order

In this work we present a new method of construction of a solution of fractional order differential equations. This method is a generalization of the widely known method based on operator algorithms. Moreover, new types of special functions are introduced and investigated.

ӘОЖ 539.3

$\boxed{\text{К.А.Тұрсынов}}$, С.Б.Ахажанов, Л.С.Мәкенова

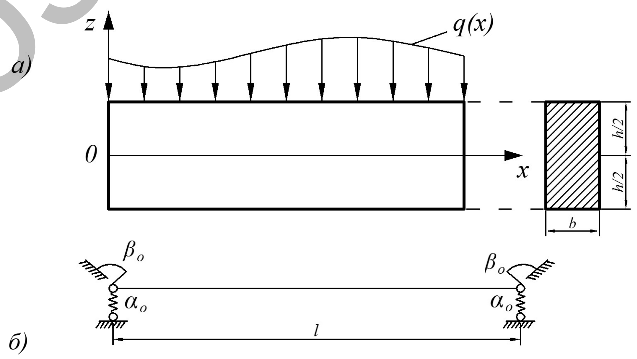
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: laura_makenova@mail.ru)

Серпімді-илемділік кезеңіндегі арқалықты есептеу

Мақалада материалы илемді, таза серпімді және серпімді-илемділі болғандағы арқалықты есептеу қарастырылған. Серпімді бекіністегі арқалықтың иілуінің кернеулік-деформациялық күйі илемділік жағдайда толығымен анықталған. Нормалдық кернеудің және арқалық материалының модулінің өзгеру заңдылықтары алынған. Арқалықтың ішкі күштері мен жылжулары табылған. Алынған нәтижелердің мәндері кесте және график түрінде көрсетілген.

Кілтті сөздер: илемді, таза серпімді, серпімді-илемділі, серпімді бекіністегі арқалық, кернеулік-деформациялық күй.

Алдымен $q(x)$ таралған жүктемесімен жүктелген $(0 \le x \le 1, -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2})$ координата жүйесінде көлденең қимасы тіктөртбұрыш болатын арқалықты қарастырайық (1-сур., а).



1-сурет: а) жүктелу схемасы; б) тіреу схемасы

Сыртқы жүктеме мына заң бойынша өзгереді:

$$q(x) = q_0 \cdot PU(x), \tag{1}$$

мұндағы q_0 — ең үлкен жүктеме; $PU(x)$ — жүктеменің таралу функциясы. $PU(x) = 1$ болғанда жүктеме біртекті таралған болып табылады.