УДК 512.815.6

Ш.Ш. Ибраев

*Университет «Болашак», Кызылорда, Казахстан*
*(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)*

# О когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп

Исследованы первые и вторые группы когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики. Доказано, что группа когомологии простого ограниченного модуля для алгебраической группы изоморфна пространству морфизмов между тривиальным одномерным модулем и соответствующей группой когомологии ядра Фробениуса данной алгебраической группы. В случае второй когомологии на характеристику $p$ основного поля накладывается ограничение $p \geq 3h-3$, где $h$ – число Кокстера.

*Ключевые слова:* алгебраическая группа, простой ограниченный модуль, когомология, алгебраически замкнутое поле, пространство морфизмов.

## *1 Введение*

*1.1.* В положительной характеристике для данной алгебраической группы с неприводимой системой корней существуют семейства бесконечных простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией. Полные описания таких семейств получены только для малых алгебраических групп ранга 1, 2 и когомологических групп степеней 1, 2 и 3 [1–12]. Некоторые примеры семейств бесконечных простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией получены в работах [13, 14]. Конечные примеры простых конечномерных модулей малых размерностей с нетривиальной когомологией описаны в работах [15–19]. В категории ограниченных модулей (модули с ограниченным старшим весом) существует только конечное число простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией. Поэтому их изучение намного проще, чем в общем случае. В [20] они рассмотрены в связи с изучением необходимых и достаточных условий изоморфности первой группы когомологии алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ и соответствующей первой группы когомологии ее алгебры Ли с коэффициентами в простых модулях. Аналогичное исследование проводится автором для случая второй когомологии.

В данной статье рассмотрены свойства первых и вторых групп когомологии алгебраических групп с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ с коэффициентами в простых ограниченных модулях. Основная цель – получить наиболее простую формулу вычисления когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп с неприводимой системой корней в положительной характеристике. Согласно [21, A.10], полученный результат для категории всех простых ограниченных модулей будет справедливым и в категории всех простых конечномерных модулей.

*1.2.* Пусть $G$ – алгебраическая группа с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем $k$ характеристики $p > 0$; $T$ – максимальный тор в $G$; $B \supset T$ – подгруппа Бореля группы $G$, соответствующая отрицательным корням. Ядро морфизма Фробениуса, рассматриваемое как ядро морфизма групповых схем, обозначается через $G^1$.

Обозначим через $R$ систему корней группы $G$ относительно $(G, T)$. Множество положительных и отрицательных корней соответственно обозначим через $R^+$ и $R^-$, и пусть $S$ – множество простых корней, $h$ – число Кокстера. Для системы корней ранга $l$ пусть $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ – простые корни и $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ – фундаментальные веса. Обозначим целочисленную решетку весов, порожденную фундаментальными весами, через $X(T)$ (аддитивная группа характеров максимального тора $T$), и пусть $X_+(T)$ – множество доминантных весов; $X_1(T)$ – множество ограниченных весов.

Пусть $V$ – рациональный $G$-модуль. Обозначим через $V^{(r)}$ скручивание Фробениуса $V$ степени $r$. Более того, существует единственный $r \geq 1$, такой что $V^{(-r)}$ есть $G$-модуль, на котором $G_1$ действует нетривиально.

Репозиторий КарГУ

*1.3.* Основным результатом данной работы является следующая

*Теорема.* Пусть $G$ – алгебраическая группа с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем $k$ характеристики $p > 0$ и $V$ – простой ограниченный $G$-модуль. Тогда:
(a) $H^1(G, V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)})$;
(b) если $p \geq 3h - 3$, то $H^2(G, V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1, V)^{(-1)})$.

*Замечание.* В достаточно больших характеристиках поля для $H^n(G, V)$ теорема верна и при $n > 2$. Однако для них нижняя граница значений характеристики $p$ еще не установлена.

Доказательство теоремы основано на изучении свойства спектральной последовательности Линдона-Хохшильда-Серра [21, I.6.6.(3)]:

$$E_2^{nm} = H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \Rightarrow H^{n+m}(G, V), \tag{1}$$

для короткой точной последовательности групповых схем

$$1 \to G^1 \to G \to G/G^1 \to 1$$

и $G$-модуля $V$.

## *2 Доказательство теоремы*

*2.1.* В данном подпункте устанавливаются необходимые для доказательства основных результатов свойства спектральной последовательности (1). Пусть $V$ – простой $G$-модуль с ограниченным старшим весом. Согласно [13, п.1, с. 768]

$$H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}).$$

Следовательно,

$$E_2^{nm} \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}). \tag{2}$$

Если $E_\infty^{nm}$ – стабильное значение точки $(n, m)$ спектральной последовательности (1), то

$$H^j(G, V) = \bigoplus_{n+m=j} E_\infty^{nm}. \tag{3}$$

*Лемма 1.* Пусть $p > 2$ и $V$ — простой $G$-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда $E_2^{2,0} = 0$.

*Доказательство.* По формуле (2), $E_2^{2,0} \cong H^2(G, H^0(G^1, V)^{(-1)})$. Так как $V$ – ограниченный простой $\mathfrak{g}$-модуль, то $H^0(G^1, V)^{(-1)} = 0$. Следовательно, $E_2^{2,0} = 0$.

*Лемма 2.* Пусть $p \geq 3h - 3$ и $V$ – простой $G$-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда $E_2^{1,1} = 0$ и $E_2^{2,1} = 0$.

*Доказательство.* Согласно [1; 502], если $p \geq 3h - 3$, то $H^1(G^1, V)^{(-1)}$ — вполне приводимый $G$-модуль и любой ее доминантный вес лежит в нижнем фундаментальном алькове. Следовательно, $H^n(G, H^1\ (G^1, V)^{(-1)}) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда по формуле (2) $E_2^{1,1} = 0$ и $E_2^{2,1} = 0$.

*Лемма 3.* Пусть $p \geq 3h - 3$ и $V$ — простой $G$-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда:
*(a)* $E_2^{2,0} = E_\infty^{2,0}$;
*(b)* $E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1}$;
*(c)* $E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}$;
*(d)* $H^2(G, V) = E_2^{20} \oplus E_2^{11} \oplus E_2^{02}$.

*Доказательство.* По определению $E_{i+1}^{n,m}$ является когомологией последовательности $E_i^{n-i,m+i-1} \to E_i^{n,m} \to E_i^{n+i,m-i+1}$. Тогда очевидно, что $E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0}$, $E_3^{1,1} = E_\infty^{1,1}$, $E_4^{0,2} = E_\infty^{0,2}$. Следовательно,

$$E_2^{2,0} = E_\infty^{2,0}, \text{ если } E_2^{2,0} = E_3^{2,0}; \tag{4}$$

$$E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1}, \text{ если } E_2^{1,1} = E_3^{1,1}; \tag{5}$$

$$E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}, \text{ если } E_2^{0,2} = E_3^{0,2} = E_4^{0,2}. \tag{6}$$

Репозиторий КарГУ

Так как $E_3^{n,m}$ является когомологией последовательности

$$E_2^{n-2,m+1} \to E_2^{n,m} \to E_2^{n+2,m-1},$$

то $E_2^{n,m} = E_3^{n,m}$, если

$$E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0 \text{ каждый раз, когда } E_2^{n,m} \neq 0. \qquad (7)$$

Согласно леммам 1 и 2, условие (7) выполняется для всех целочисленных точек $(n,m) = (2,0), (1,1), (0,2)$. Тогда утверждения $(a)$ и $(b)$ следуют соответственно из (4) и (5).

Аналогично, $E_3^{n,m} = E_4^{n,m}$, если

$$E_2^{n-3,m+2} = E_2^{n+3,m-2} = 0 \text{ каждый раз, когда } E_2^{n,m} \neq 0. \qquad (8)$$

Пусть $(n,m) = (0,2)$. Тогда по формуле (2) $E_2^{3,0} \cong H^3(G, H^0(G^1,V)^{(-1)}) = 0$. Поэтому, согласно условию (8), $E_3^{0,2} = E_4^{0,2}$. Таким образом, утверждение $(c)$ следует из (6).

Наконец, утверждение $(d)$ следует из утверждений $(a)$ – $(c)$ и формулы (3).

*2.2. Доказательство теоремы.* $(a)$ Если $n+m=1$, то для всех целочисленных точек первого квадранта $E_2^{n,m} = E_\infty^{1,0}$, $E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0$. Тогда, используя формулу (3), получим

$$H^1(G,V) = E_2^{1,0} \oplus E_2^{0,1}.$$

Согласно (2), $E_2^{1,0} \cong H^1(G, H^0(G^1,V)^{(-1)})$. Легко показать, что $E_2^{1,0} = 0$. Действительно, если $V \neq k$, то это очевидно. Если $V = k$, то $H^0(G^1,V)^{(-1)} = k$, тогда $E_2^{1,0} \cong H^1(G,k) = 0$. Следовательно, $H^1(G,V) = E_2^{0,1}$. Наконец, используя (3), получим

$$H^1(G,V) \cong H^0(G, H^1(G^1,V)^{(-1)}) \cong Hom_G(k, H^1(G^1,V)^{(-1)}).$$

$(b)$ Согласно леммам 1 и 2, $E_2^{2,0} = E_2^{1,1} = 0$. Тогда по лемме 3 $(d)$

$$H^2(G,V) = E_2^{02}. \qquad (9)$$

Далее, согласно (2), $E_2^{02} \cong H^0(G, H^2(G^1,V)^{(-1)}) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1,V)^{(-1)})$. Тогда, используя (9), получим

$$H^2(G,V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1,V)^{(-1)}).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0828/ГФ4 (рук. А.С. Джумадильдаев) МОН РК по теме «Алгебры, близкие к Лиевым: когомологии, тождества и деформации».*

Список литературы

1 *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. Journal Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.

2 *Cline E. Ext*$^1$ for $SL_2$ // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7. — P. 107–111.

3 *Yehia S.El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. PhD thesis. — Warwik. — 1982.

4 *Ye Jia-chen.* Extensions of simple modules for the group $Sp(4,K)$ // Journal London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2(41). — P. 51–62.

5 *Liu Jia-chun, Ye Jia-chen.* Extensions of simple modules for the algebraic group of type $G_2$ // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21(6). — P. 1909–1946.

6 *Ибраев Ш.Ш.* Первые группы когомологии простых модулей над алгебраической группой типа $B_3$ в положительной характеристике // Молодой ученый. — 2011. — Т. 2. — № 2(25). — С. 6–10.

7 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple $SL_2$-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.

Репозиторий КарГУ

8 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple $SL_3$-modules // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — No. 12. — P. 4702–4716.

9 *Ibraev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4(k)$ // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — No. 3. — P. 1122–1130.

10 *Ibraev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules for $G_2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2011. — Vol. 8. — P. 381–396.

11 *Ибраев Ш.Ш.* Вторые группы когомологии простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — № 2(63). — С. 16–21.

12 *Ибраев Ш.Ш.* О третьих когомологиях простых $SL_2$-модулей // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 1(77). — С. 41–47.

13 *Sullivan J.B.* Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. Journal Math. — 1980. — Vol. 102. — No. 4. — P. 765–780.

14 *McNinch G.J.* The second cohomology of small irredusible modules for simple algebraic groups // Pacific J. Math. — 2002. — Vol. 204. — No. 2. — P. 459–472.

15 *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. Journal Math. — 1981. — Vol. 103. — No. 2. — P. 399–410.

16 *Cline E., Parshall B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. I // IHES Publ. Math. — 1975. — Vol. 45. — P. 169–191.

17 *Cline E., Parshall B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. II // Journal Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 182–198.

18 University of Georgia VIGRE Algebra Group. First cohomology for finite groups of Lie type: Simple modules with small dominant weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 1025–1050.

19 University of Georgia VIGRE Algebra Group. Second cohomology for finite groups of Lie type // Journal Algebra. — 2012. — Vol. 360. — P. 21–52.

20 *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — № 4. — С. 512–521.

21 *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. Second edition. American Math. Soc. in Mathematical Surveys and Monographs. — Vol. 107. — 2003.


Ш.Ш. Ыбыраев

## Алгебралық группалар үшін жай шектелген модульдердің когомологиялары туралы

Сипаттамасы оң алгебралық тұйық өрістегі түбірлер жүйесі келтірілмеген алгебралық группалар үшін жай шектелген модульдер когомологияларының бірінші және екінші группалары зерттелді. Алгебралық группа үшін жай шектелген модульдің когомология группасы бір өлшемді модуль мен берілген алгебралық группа үшін Фробениус морфизмі ядросының сәйкесті когомология группасының арасындағы морфизмдер кеңістігіне изоморфты екені дәлелденді. Екінші когомология жағдайында негізгі өрістің $p$ сипаттамасына $p \geq 3h - 3$ шектемесі қойылды, бұл жерде $h$ – Кокстер саны.

*Кілт сөздер:* алгебралық группа, шектелген жай модуль, когомология, алгебралық тұйық өріс, морфизмдер кеңістігі.

Репозиторий КарГУ

Sh.Sh. Ibraev

# On the cohomology of simple restricted modules for algebraic groups

First and second cohomology groups of simple restricted modules for algebraic groups with irreducible root system over an algebraically closed field of positive characteristic are investigated. We show that the cohomology group of simple restricted module for algebraic group is isomorphic to the space of morphisms between the trivial one-dimensional module and the corresponding cohomology group for the Frobenius kernel of this algebraic group. In the second cohomology case assumed that $p \geq 3h-3$, where $h$ is the Coxeter number.

*Keywords:* algebraic group, restricted simple module, cohomology, algebraically closed field, space of morphisms.

References

1 Andersen H.H. *American Journal of Mathematics,* 1984, 106, p. 489–504.

2 Cline E. *Commun. Algebra,* 1979, 7, p. 107–111.

3 Yehia S.El. *Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. PhD thesis,* Warwik, 1982.

4 Ye Jia-chen. *Journal London Math. Soc.*, 1990, 2(41), p. 51–62.

5 Liu Jia-chun, Ye Jia-chen. *Commun. Algebra*, 1993, 21(6), p. 1909–1946.

6 Ibraev Sh.Sh. *Young scientist,* 2011, 2, 2(25), p. 6–10.

7 Stewart D.I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, 138, p. 427–434.

8 Stewart D.I. *Commun. Algebra*, 2012, 40, 12, p. 4702–4716.

9 Ibraev Sh.Sh. *Commun. Algebra*, 2012, 40, 3, p. 1122–1130.

10 Ibraev Sh.Sh. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, 8, p. 381–396.

11 Ibraev Sh.Sh. *Bulletin of Karaganda University, Ser. Mathematics,* 2011, 2(63), p. 16–21.

12 Ibraev Sh.Sh. *Bulletin of Karaganda University, Ser. Mathematics,* 2015, 1(77), p. 41–47.

13 Sullivan J.B. *American Journal of Mathematics*, 1980, 102, 4, p. 765–780.

14 McNinch G.J. *Pacific Journal of Mathematics*, 2002, 204, 2, p. 459–472.

15 O'Halloran J. *Amer. J. Math.*, 1981, 103, 2, p. 399–410.

16 Cline E., Parshall B., Scott L. *IHES Publ. Math.,* 1975, 45, p. 169–191.

17 Cline E., Parshall B., Scott L. *Journal Algebra.*, 1977, 45, p. 182–198.

18 *Transactions of the American Mathematical Society*, 2013, 365, p. 1025–1050.

19 *Journal Algebra*, 2012, 360, p. 21–52.

20 Ibraev Sh.Sh. *Mathematics notes*, 2014, 96, 4, p. 512–521.

21 Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups, Second edition, American Math. Soc. in Mathematical Surveys and Monographs,* 107, 2003.

Репозиторий КарГУ